

### 3. Základní dynamické systémy

#### 3.1. Základní spojité dynamické systémy



**Čas ke studiu:** 12 až 18 hodin



**Cíl** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- Popsat proporcionální spojitý systém a jeho realizaci
- Popsat integrační spojitý systém a jeho realizaci
- Popsat setrvačný systém 1. řádu a jeho realizaci
- Popsat derivační spojitý systém a jeho realizaci
- Popsat reálný derivační spojitý systém a jeho vlastnosti
- Popsat statický systém 2. řádu a jeho vlastnosti podle velikosti koeficientu tlumení
- Popsat systém s dopravním zpožděním



#### Výklad

Většinu **spojitých lineárních systémů** (mimo dopravní zpoždění) lze namodelovat pomocí soustavy složené ze tří typů prvků: **integrátorů, sumátorů a zesilovačů**, jak bude dále ukázáno při popisu jednotlivých systémů. Pro snadnější analýzu spojitých dynamických systému bude ukázán popis **základních dynamických systémů**, které mají typické vlastnosti:

- **proporcionální systém**
- **integrační systém**
- **systém se setrvačností prvního řádu**
- **derivační systém**
- **statický systém druhého řádu**
- **dopravní zpoždění**

Znalost vlastností uvedených základních systémů umožní snadnou **analýzu složitějších systémů**, které můžeme nahradit několika základními systémy tak, aby vlastnosti byly shodné.

#### □ **Proporcionální systém**

**Proporcionální systém** bude popsán všemi dříve uvedenými způsoby popisu pro lineární spojité systémy.

Popis **diferenciální rovnicí** 0.řádu lze zapsat v následujícím tvaru

$$y(t) = K \cdot u(t)$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K,$$

kde  $K$  je zesílení proporcionálního systému.

Popis **frekvenčním přenosem** po dosazení za  $s = j\omega$  bude následující

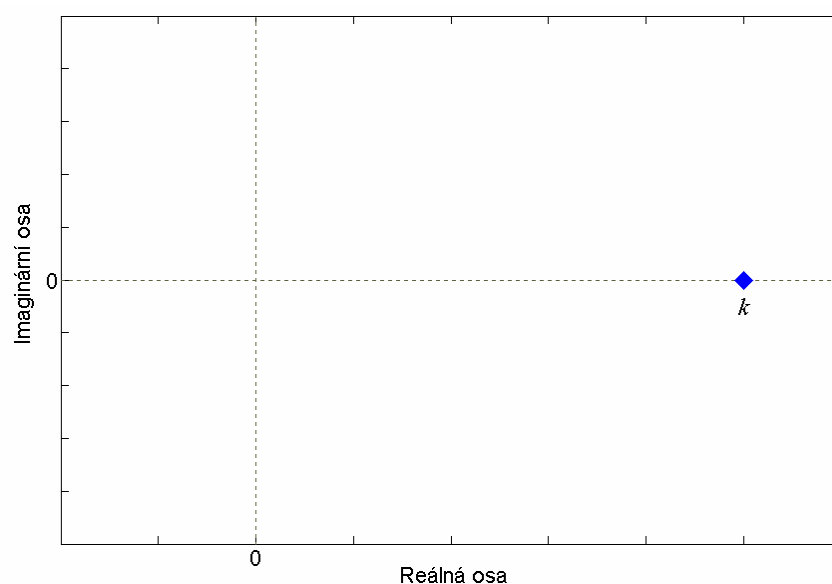
$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K$$

**Frekvenční charakteristika proporcionálního systému v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.11, reálná složka frekvenčního přenosu je rovna zesílení  $K$ .

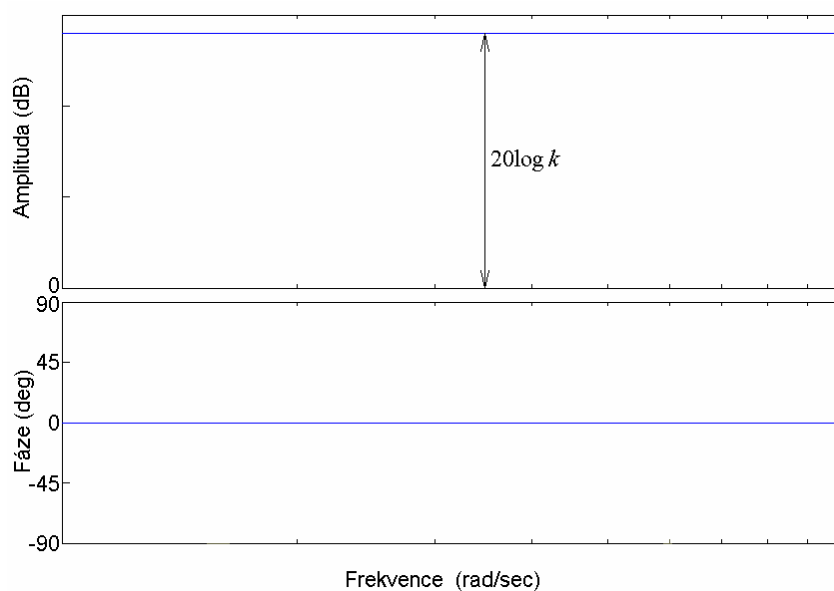
**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika proporcionálního systému** je znázorněna na obr.3.12 a je určena následujícími vztahy:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log K$$

$$\varphi(j\omega) = 0$$



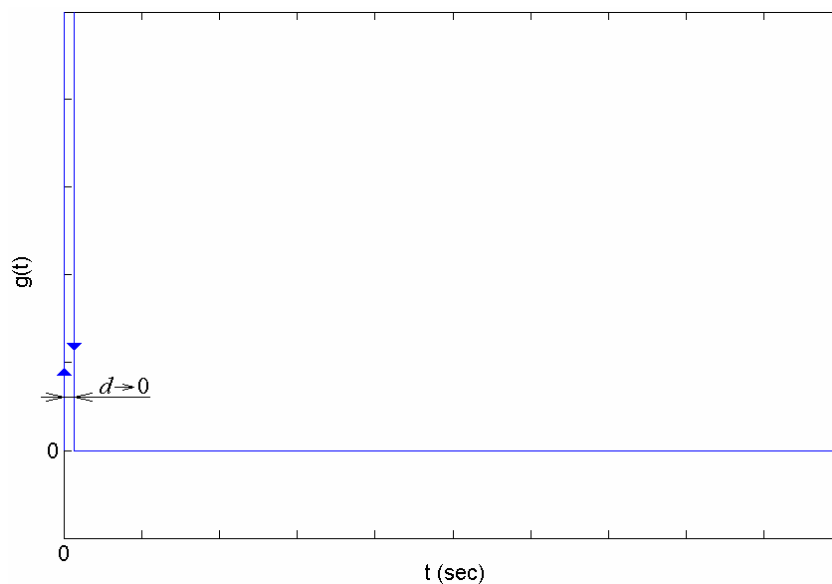
Obr. 3.11: Frekvenční charakteristika proporcionálního systému v komplexní rovině



Obr. 3.12: Frekvenční charakteristika proporcionálního systému v logaritmických souřadnicích

Odezva **proporcionálního systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je znázorněn na obr. 3.13. Funkci popisující **průběh impulsní charakteristiky** lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce

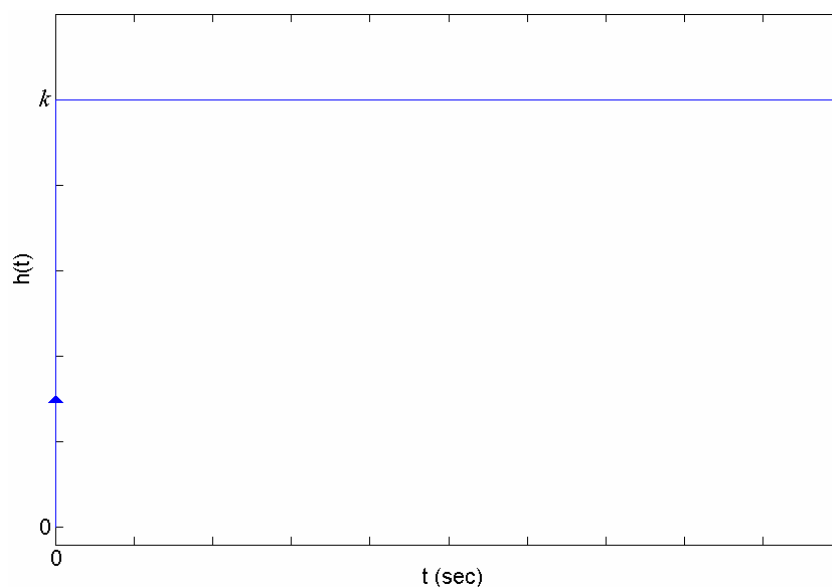
$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{K\}$$



Obr. 3.13: Odezva proporcionálního systému na jednotkový impuls

Odezva **proporcionálního systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je znázorněna na obr. 3.14. Je to rovnoběžná přímka s osou  $t$  ve vzdálenosti  $K$ . Funkci popisující **průběh přechodové charakteristiky** lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce

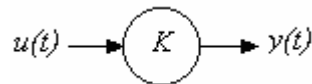
$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} K\right\} = K$$



Obr. 3.14: Odezva proporcionálního systému na jednotkový skok

Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině není **proporcionální systém** charakterizován **žádnou nulou a pólem**.

Pro sestavení **stavových diagramů** složitějších systémů, které lze využít pro jejich modelování a simulační výpočty, je potřeba sestavit **stavový diagram**. **Stavový diagram proporcionálního systému** je znázorněn na obr. 3.15.



Obr. 3.15: Stavový diagram (pro vnitřní popis) proporcionálního systému

**Proporcionální vlastnost** u reálných dynamických systémů lze definovat pouze **v určitém pracovním pásmu**, například elektronické zesilovače lze považovat jako proporcionální pouze v pásmu pracovních frekvencí

$$0 \leq \omega \leq 10^3 \text{ rad / s .}$$

Jako **reálné proporcionální systémy** lze vždy s určitou aproximací nebo pracovním pásmu považovat elektronické zesilovače, mechanické převody, potenciometry, některé převodníky fyzikálních veličin, aj..

#### □ Integrační systém

**Integrační systém** bude popsán všemi dříve uvedenými způsoby pro lineární spojité systémy.

Popis **diferenciální rovnicí** 1. řádu lze zapsat v následujícím tvaru

$$\frac{d y(t)}{d t} = k_i \cdot u(t)$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice

$$s \cdot Y(s) = k_i \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_i}{s} = \frac{1}{T_i s}$$

kde  $k_i$  je **zesílení systému** a  $T_i$  je **časová konstanta integračního systému**.

Popis **frekvenčním přenosem** po dosazení za  $s = j\omega$  bude následující

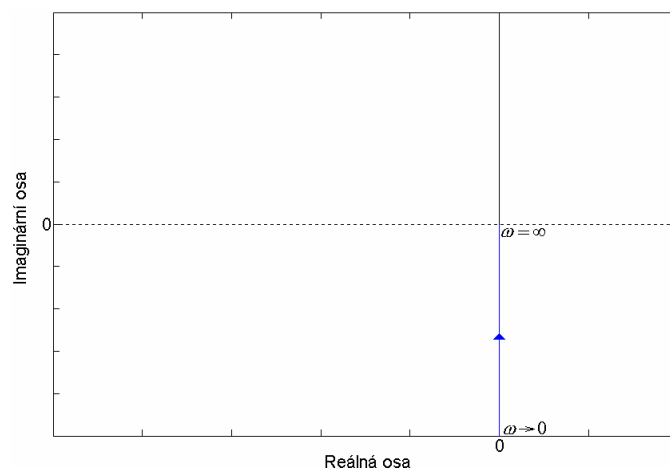
$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{k_i}{j\omega} = -j \frac{k_i}{\omega}$$

**Frekvenční charakteristika integračního systému** v komplexní rovině je znázorněna na obr. 3.12, frekvenční přenos je imaginární a charakteristiku tvoří záporná imaginární osa.

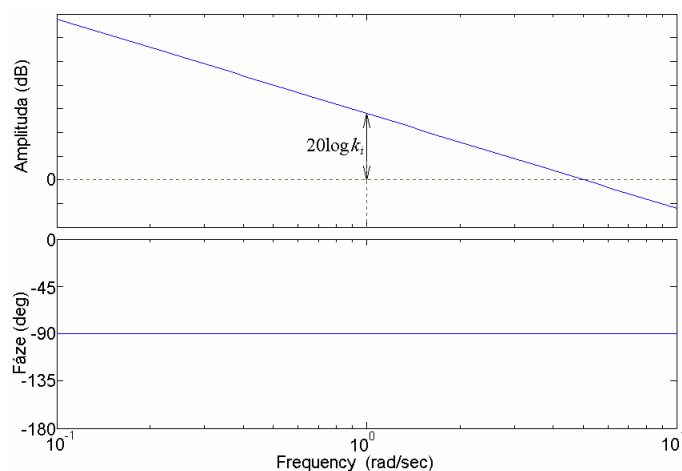
**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika integračního systému** je znázorněna na obr.3.13 a je určena následujícími vztahy:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k_i - 20 \log \omega$$

**Amplitudovou charakteristiku** určuje rovnice přímky se sklonem  $-20\text{dB/dek}$ . Bod, kterým přímka se sklonem  $-20\text{dB/dek}$  prochází, lze získat dosazením  $\omega = 1$  do výše uvedené rovnice, amplituda v bodě  $\omega = 1$  pak bude  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log k_i$ . **Fázová charakteristika** bude přímka rovnoběžná s osou  $\omega$  v bodě  $-90^\circ$  ( $-\pi/2$ ).



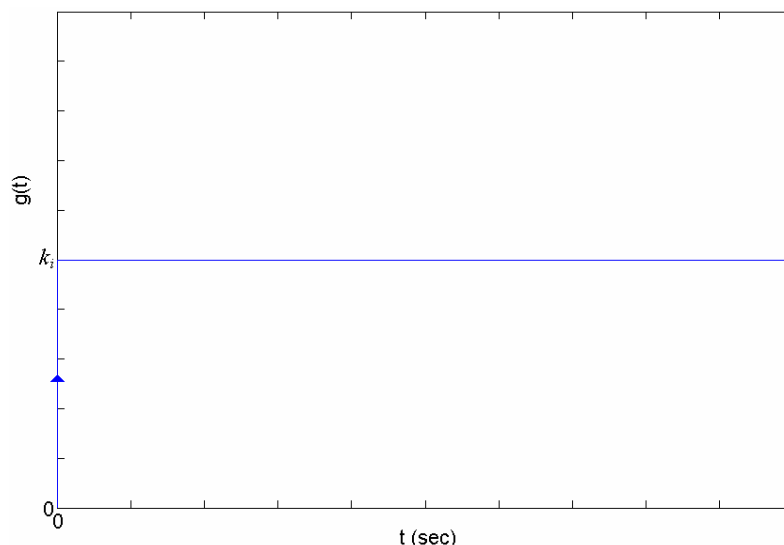
Obr. 3.12: Frekvenční charakteristika integračního systému v komplexní rovině



Obr. 3.13: Frekvenční charakteristika integračního systému v logaritmických souřadnicích

Odezva **integračního systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je skoková funkce s hodnotou  $k_i$ , která je znázorněna na obr. 3.14. Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = k_i \cdot u_0(t)$$



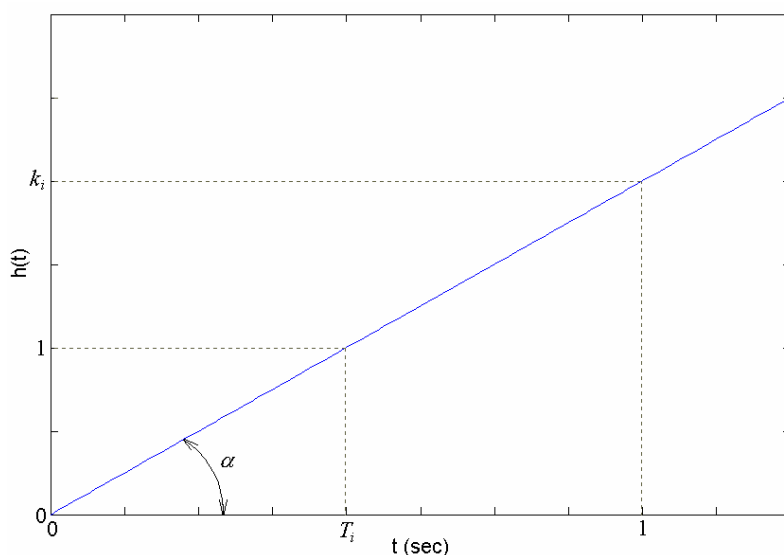
Obr. 3.14: Odezva integračního systému na jednotkový impuls

Odezva **integračního systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je polopřímka s počátkem v čase nula a se směrnicí  $k_i$ , která je znázorněna na obr. 3.15. Funkci přechodové charakteristiky lze opět získat zpětnou Laplaceovou transformací

$$h(t) = L^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = k_i \cdot t = \frac{1}{T_i} t$$

kde směrnice polopřímky je určena vztahem

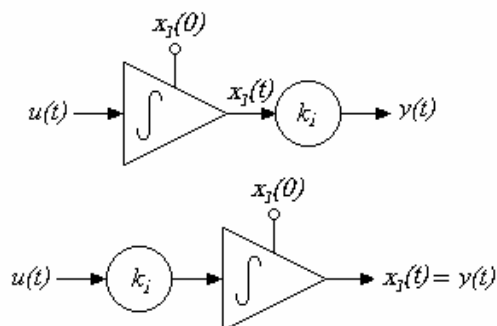
$$\tan \alpha = k_i = \frac{1}{T_i}$$



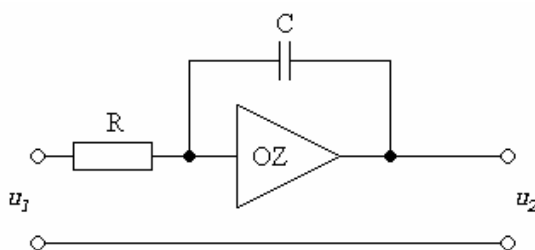
Obr. 3.15: Odezva integračního systému na jednotkový skok

Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je **integrační systém** charakterizován nulovým pólem v počátku.

**Stavový diagram integračního systému** je znázorněn na obr. 3.16.



Obr. 3.16: Stavový diagram (pro vnitřní popis) integračního systému



Obr. 3.17: Realizace integračního systému

**Reálný integrační systém** lze realizovat operačním zesilovačem s kapacitní vazbou (obr. 3.17), další reálné integrační systémy jsou pneumatické a mechanické regulátory.

#### □ **Systém se setrvačností prvního řádu**

**Systém se setrvačností prvního řádu** bude popsán všemi dříve uvedenými způsoby pro lineární spojitý systém.

Popis **diferenciální rovnicí** 1. řádu lze zapsat v následujícím tvaru

$$a_1 \cdot \frac{d y(t)}{d t} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t),$$

nebo po vydělení rovnice koeficientem  $a_0$  ve tvaru se zesílením a časovou konstantou

$$T \frac{d y(t)}{d t} + y(t) = K \cdot u(t),$$

kde  $K$  je **zesílení systému** a  $T$  je **časová konstanta systému se setrvačností 1. řádu**, pro které platí následující vztahy

$$T = \frac{a_1}{a_0}; \quad K = \frac{b_0}{a_0}$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice

$$s \cdot T \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T \cdot s + 1},$$

**Frekvenčním přenos** se získá po dosazení za  $s = j\omega$  a bude následující

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}.$$

Pro určení **modulu frekvenčního přenosu** je potřeba určit **reálnou a imaginární složku** frekvenčního přenosu

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{K}{\omega^2 T^2 + 1}$$

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{-\omega TK}{\omega^2 T^2 + 1}$$

Po úpravě je pak výsledný tvar **modulu frekvenčního přenosu** následující

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}.$$

Pro kladné frekvence lze **počáteční a koncová hodnota amplitudy** určit následovně

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} = K, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} = 0,$$

**z reálné a imaginární složky přenosu** lze určit rovněž funkci **fáze frekvenčního přenosu**

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}[G(j\omega)]}{\operatorname{Re}[G(j\omega)]} = \arctan(-\omega T) = -\arctan(\omega T).$$

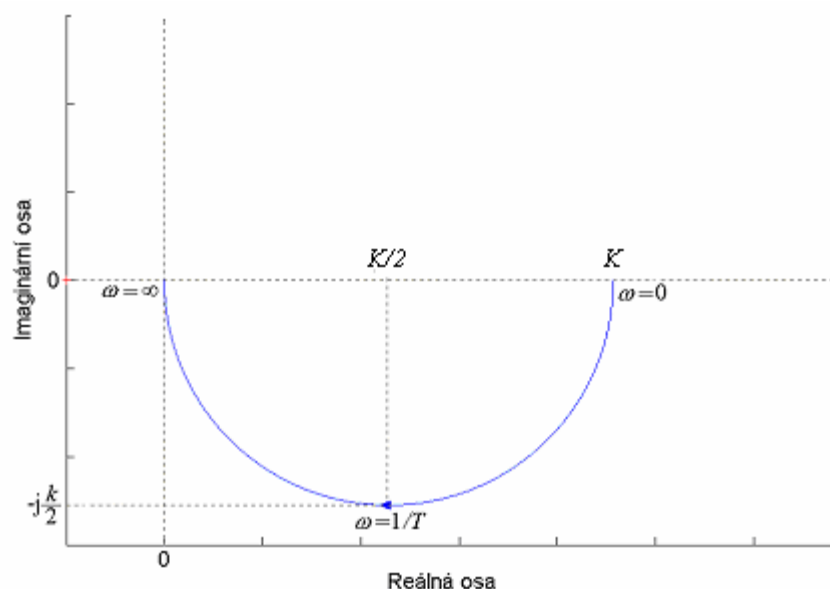
Pro kladné frekvence lze určit **počáteční a koncovou hodnotu fáze** následovně

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (-\arctan(\omega T)) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-\arctan(\omega T)) = -\frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \omega \leq \infty \quad \text{je} \quad 0 \geq \varphi \geq -90^\circ.$$

Pro další bod charakteristiky, kdy úhlová frekvence je rovna převrácené hodnotě časové konstanty soustavy platí

$$\omega T = 1 \quad \text{je} \quad \varphi = -45^\circ$$



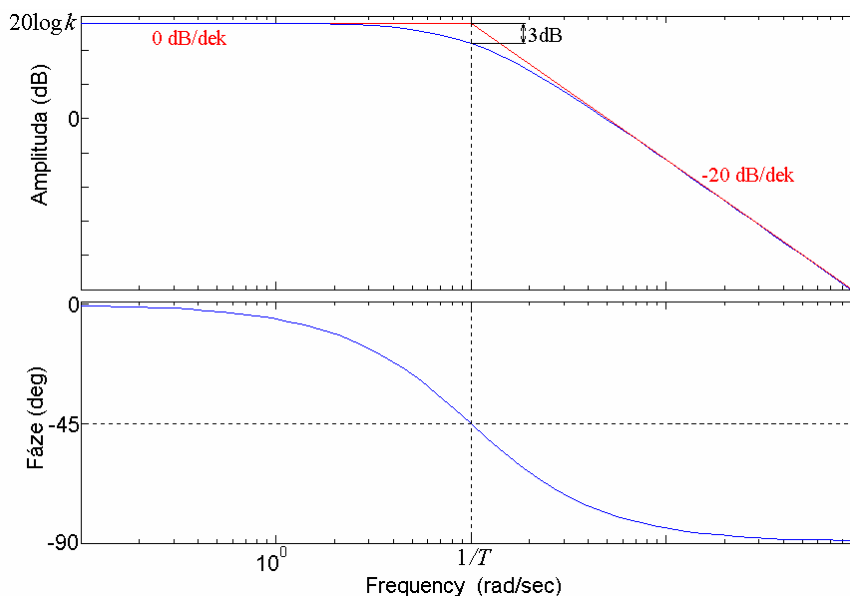
Obr. 3.18: Frekvenční charakteristika setrvačného systému v komplexní rovině



**Frekvenční charakteristika setrvačného systému v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.18. Frekvenční charakteristiku představuje půlkružnice ve čtvrtém kvadrantu, která vychází z bodu  $K$ , ve kterém je fáze rovna nule, a končí v bodě  $0$ , kde fáze je rovna  $-90^\circ$ .

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika setrvačného systému** je znázorněna na obr.3.19 a je určena následujícím vztahem pro amplitudovou charakteristiku:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}.$$



Obr. 3.19: Frekvenční charakteristika systému v logaritmických souřadnicích

Pro vynesení grafu v logaritmických souřadnicích je vhodné nejprve určit **asymptoty** této **charakteristiky**. Uvedený vztah pro LAFFCH lze zjednodušit na výraz pro nízké frekvence vzhledem k frekvenci odpovídající převrácené hodnotě časové konstanty  $T$  následovně

$$\text{pro } \omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow T^2 \omega^2 \ll 1$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \doteq 20 \log K,$$

naopak pro vysoké frekvence bude platit následující vztah

$$\text{pro } \omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow T^2 \omega^2 \gg 1$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \doteq 20 \log K - 20 \log T \omega.$$

Takto se získaly rovnice dvou aproximačních polopřímek, **asymptot**, jejichž společný bod je v **bodě zlomu frekvenční charakteristiky**  $\omega = \frac{1}{T}$ , ve kterém je největší odchylka (největší chyba) od skutečné hodnoty frekvenční charakteristiky. **Velikost chyby** lze získat z následujících vztahů:

- pro  $\omega < \frac{1}{T}$

$$\Delta(j\omega) = 20 \log K + 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} - 20 \log K = 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

- pro  $\omega > \frac{1}{T}$

$$\Delta(j\omega) = 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} - 20 \log T \omega$$

- pro  $\omega = \frac{1}{T}$ , **bod zlomu**, po dosazení do předcházejících rovnic se vypočte **velikost chyby**, která je **3 dB**

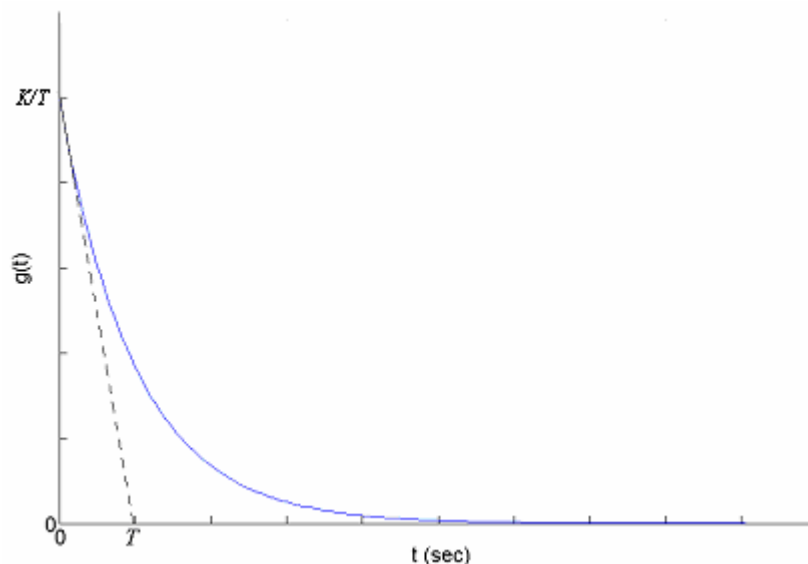
Odezva **setrvačného systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je exponenciální funkce z počáteční hodnotou  $K/T$  a konečnou hodnotou rovnou nule a je znázorněna na obr. 3.20. Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts + 1} \right\} = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} = \frac{K}{T}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} = 0$$



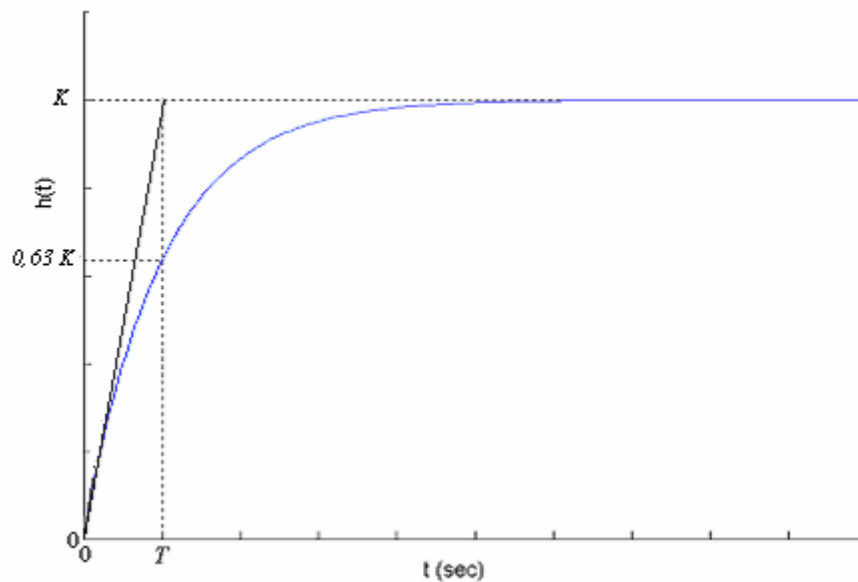
Obr. 3.20: Odezva setrvačného systému na jednotkový impuls

Je-li sestrojena **tečna v počátečním bodě odezvy**, pak tato tečna protne časovou osu  $t$  v **bodě odpovídajícím časové konstantě  $T$** , co lze odvodit z následujícího vztahu pro derivaci odezvy v čase  $t = 0$ .

$$\left. \frac{dg(t)}{dt} = \frac{K}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{K}{T^2} \Rightarrow \frac{\Delta g(t)}{\Delta t} = \frac{K}{T}$$

Odezva **setrvačného systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je charakterizována exponenciálním průběhem s **počáteční hodnotou nula** a s **konečnou hodnotou  $K$**  a je znázorněna na obr. 3.21. Funkci přechodové charakteristiky lze opět získat zpětnou Laplaceovou transformací

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot G(s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s \cdot (Ts + 1)} \right\} = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



Obr. 3.21: Odezva setrvačného systému na jednotkový skok

Pro čas  $t \geq 0$  jsou **počáteční a koncová hodnota** přechodové charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) = 0$$

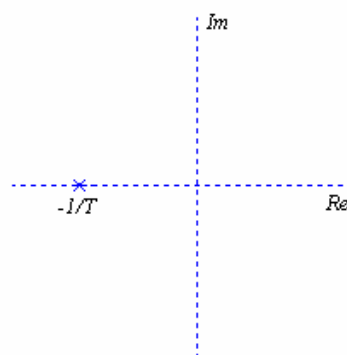
$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) = K$$

Je-li sestrojena **tečna v počátečním bodě odezvy**, pak tato tečna protne pořadnici odpovídající ustálené hodnotě  $h(\infty)$  v čase odpovídající **časové konstantě**  $T$ , co lze odvodit z následujícího vztahu pro derivaci odezvy v čase  $t = 0$ .

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{K}{T} \Rightarrow \frac{\Delta h(t)}{\Delta t} = \frac{K}{T}$$

Dalším charakteristickým bodem přechodové charakteristiky systému prvního řádu je její **hodnota pro čas  $T$**

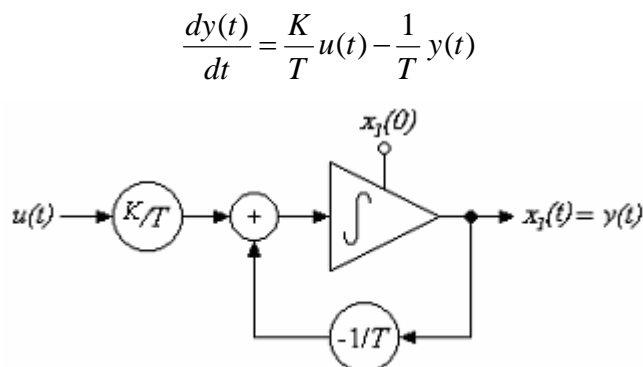
$$h(T) = K \cdot (1 - e^{-1}) = K \cdot 0,632$$



Obr. 3.22: Rozložení nul a pólu setrvačného systému se zesílením a časovou konstantou

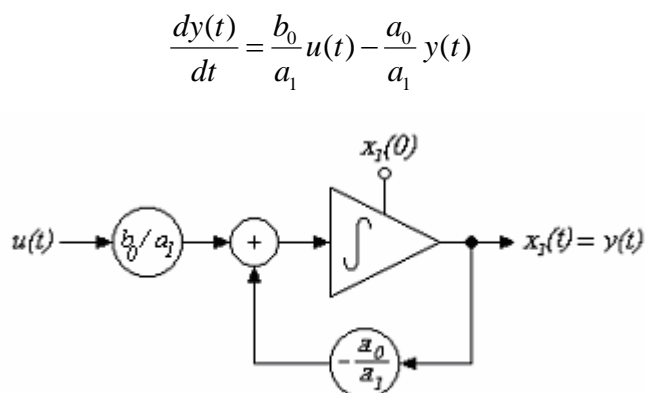
Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je setrvačný systém charakterizován **jedním pólem na záporné reálné poloose** ve vzdálenosti  $\frac{1}{T}$  od počátku (obr.3.22).

Pro znázornění **stavového diagramu** lze diferenciální rovnici upravit následovně a stavový diagram je pak znázorněn na obr. 3.23.



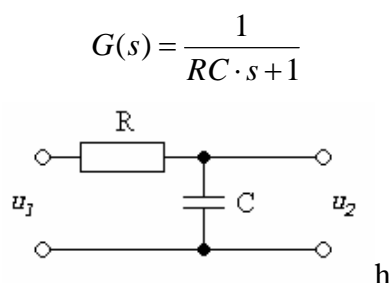
Obr. 3.23: Stavový diagram setrvačného systému se zesílením a časovou konstantou

Pro znázornění **stavového diagramu** lze diferenciální rovnici se základními koeficienty upravit následovně a stavový diagram je pak znázorněn na obr. 3.24:



Obr. 3.24: Stavový diagram setrvačného systému se základními koeficienty diferenciální rovnice

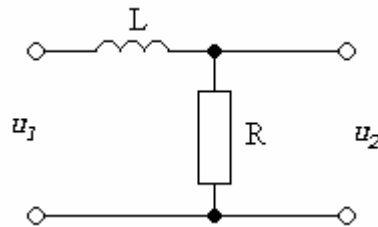
**Reálný setrvačný systém** lze realizovat pomocí RC (obr. 3.25) nebo RL obvodu (obr. 3.26), součástí většiny reálných systémů je právě setrvačný systém. Přenosová funkce RC systému bude následující:



Obr. 3.25: Realizace setrvačného systému pomocí rezistoru a kapacity

Přenosová funkce RL systému bude následující:

$$G(s) = \frac{1}{\frac{L}{R} \cdot s + 1}$$



Obr. 3.26: Realizace setrvačného systému pomocí rezistoru a indukčnosti

**Řešený příklad****Příklad 3.2.1***Zadání:*

Je zadán dolnoproustný RC filtr podle obr.3.25 jehož odpor  $R = 500 \text{ k}\Omega$  a kapacita  $C = 0,6 \text{ }\mu\text{F}$ . Určete časovou konstantu a znázorněte jeho impulsní a přechodovou charakteristiku pomocí Matlabu a Simulinku.

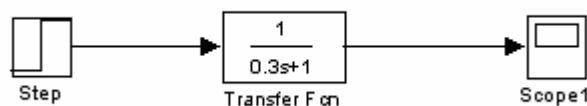
*Řešení:*

Časová konstanta se určí následovně

$$T = R \cdot C = 5 \cdot 10^5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6} = 0,3$$

Přenos tohoto filtru bude

$$G(s) = \frac{1}{0,3 \cdot s + 1}$$



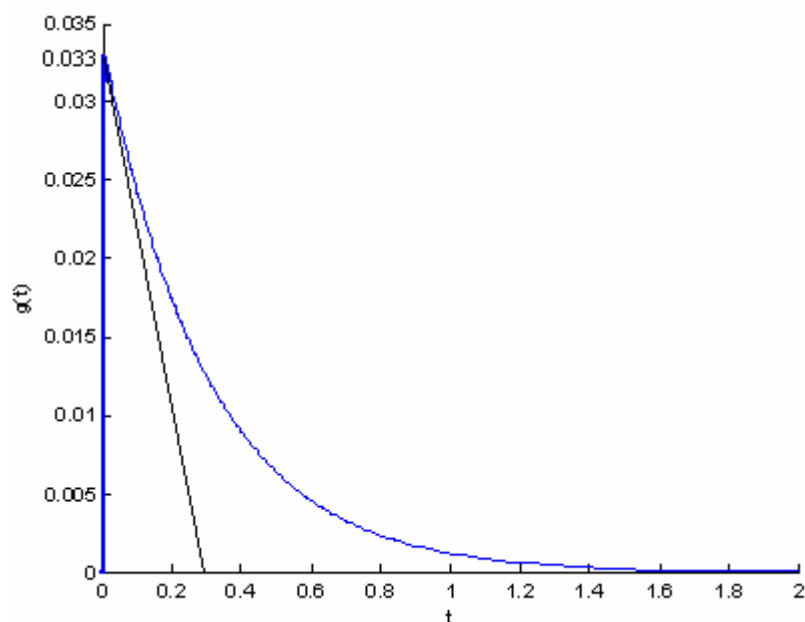
Obr. 3.27: Model filtru v Simulinku pro impulsní a přechodovou charakteristiku

Počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky znázorněné na obr. 3.28 modře budou následující

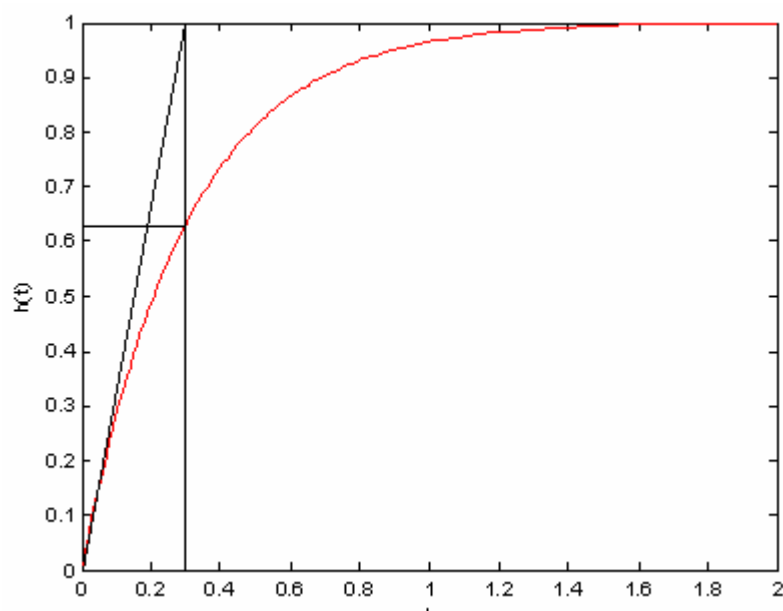
$$g(0) = \frac{K}{T} = \frac{1}{0,3} = 0,033 \quad g(\infty) = 0.$$

Počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky znázorněné na obr. 3.29 červeně budou následující

$$h(0) = 0 \quad h(\infty) = K = 1$$



Obr. 3.28: Odezva RC filtru na jednotkový impuls



Obr. 3.28: Odezva RC filtru na jednotkový skok

Konec příkladu.



**Řešený příklad**

### Příklad 3.2.2

Zadání:

Je zadán dolnoproustný RL filtr podle obr.3.26 jehož odpor  $R = 0,2 \, \Omega$  a indukčnost  $L = 0,8 \, \text{mH}$ . Určete frekvenční charakteristiku filtru v komplexní rovině a amplitudovou a fázovou charakteristiku v logaritmických souřadnicích pomocí Matlabu.

Řešení:

Časová konstanta se určí následovně

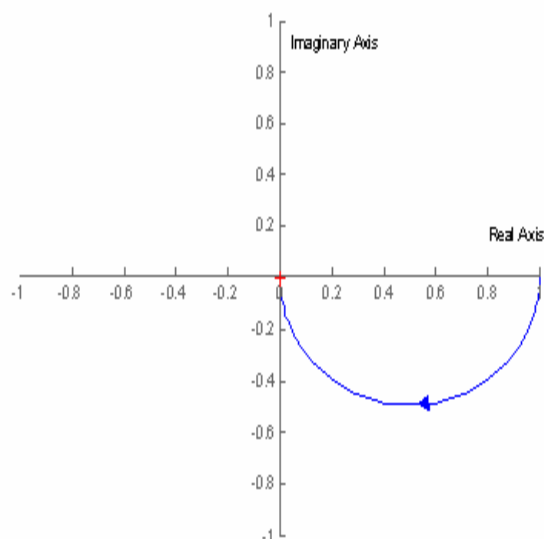
$$T = \frac{L}{R} = \frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 0,004$$

Přenos tohoto filtru bude

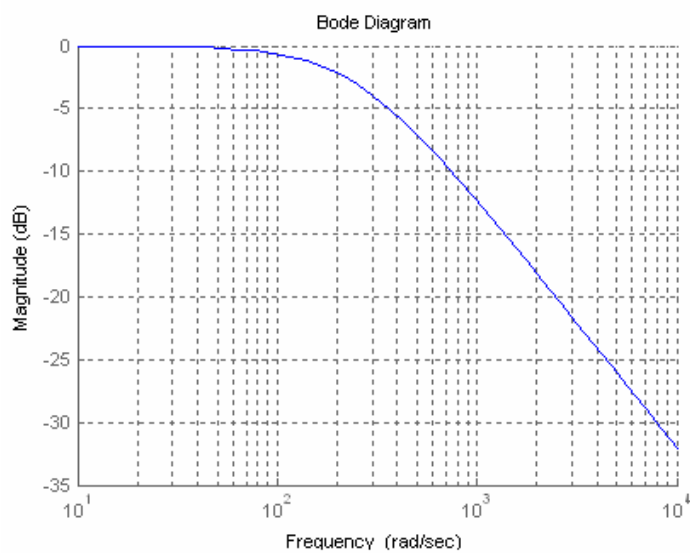
$$G(s) = \frac{1}{0,004 \cdot s + 1}$$

Pomocí následující posloupnosti příkazů v Matlabu se získají frekvenční charakteristiky na obrázku 3.29 a 3.30:

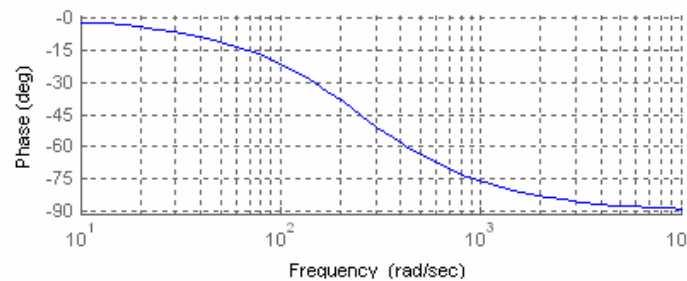
```
b=[1]
a=[0.004 1]
g=tf(b,a)
nyquist(g)
bodemag(g)
bode(g)
```



Obr. 3.29: Frekvenční charakteristika filtru



a)



b)

Obr. 3.30: Logaritmická amplitudová (a) a fázová (b) frekvenční charakteristika filtru

Frekvence zlomu logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky se určí následovně

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,004} = 250 \text{ [rad/s]}$$

Konec příkladu.

### q Derivační systém

**Derivační systém** bude popsán všemi dříve uvedenými způsoby pro lineární spojitý systém.

Popis **diferenciální rovnicí** 1. řádu lze zapsat v následujícím tvaru

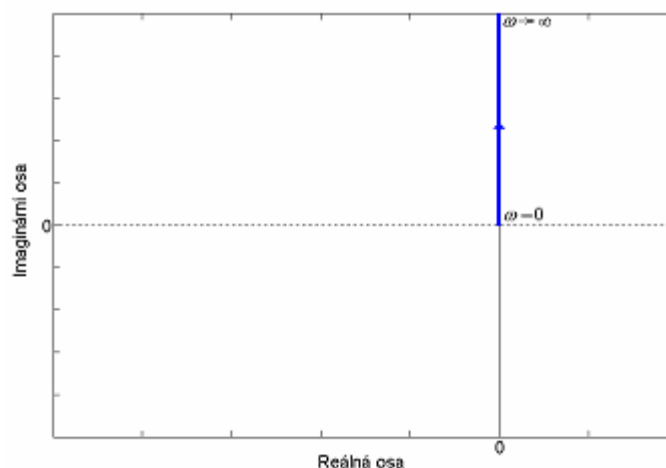
$$y(t) = k_d \cdot \frac{du(t)}{dt},$$

kde  $k_d$  je zesílení systému.

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice

$$Y(s) = k_d \cdot s \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k_d \cdot s$$



Obr. 3.31: Frekvenční charakteristika derivačního systému v komplexní rovině

**Frekvenční přenos se získá** dosazením za  $s = j\omega$  a bude následující



$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = j\omega \cdot k_d$$

**Modul frekvenčního přenosu** je určen pouze **imaginární složkou** frekvenčního přenosu. Výsledný tvar **modulu** frekvenčního přenosu následující

$$|G(j\omega)| = \omega \cdot k_d,$$

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota amplitudy** následující

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \cdot k_d = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \cdot k_d = \infty$$

Protože přenos má pouze imaginární složku funkce **fáze frekvenčního přenosu** bude konstantní

$$\varphi(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} = \arctan\left(\frac{\omega k_d}{0}\right) \Rightarrow \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota fáze** shodná

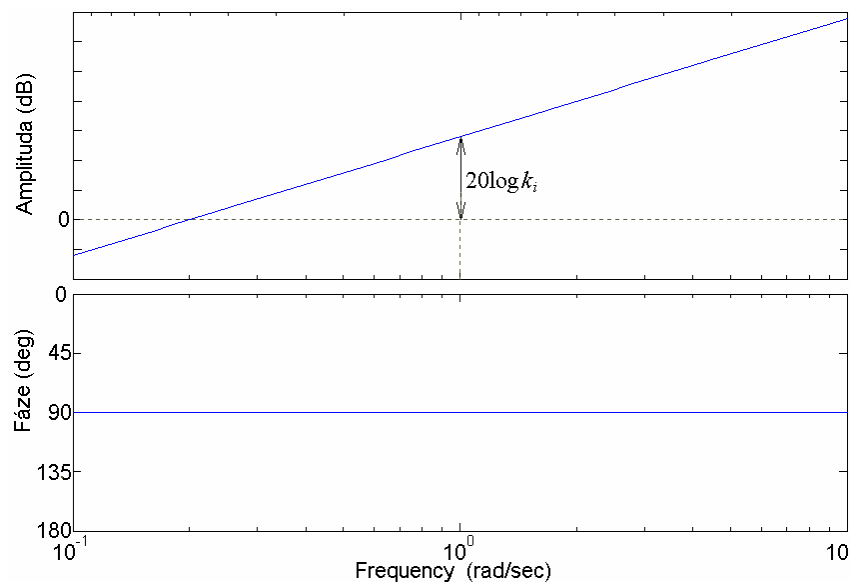
$$0 \leq \omega \leq \infty \text{ je } \varphi = 90^\circ.$$

**Frekvenční charakteristika derivačního systému v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.31, frekvenční přenos je imaginární a charakteristiku tvoří kladná imaginární osa.

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika derivačního systému** je znázorněna na obr.3.32 a je určena následujícími vztahy:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k_d + 20 \log \omega$$

$$\varphi(j\omega) = 90^\circ$$

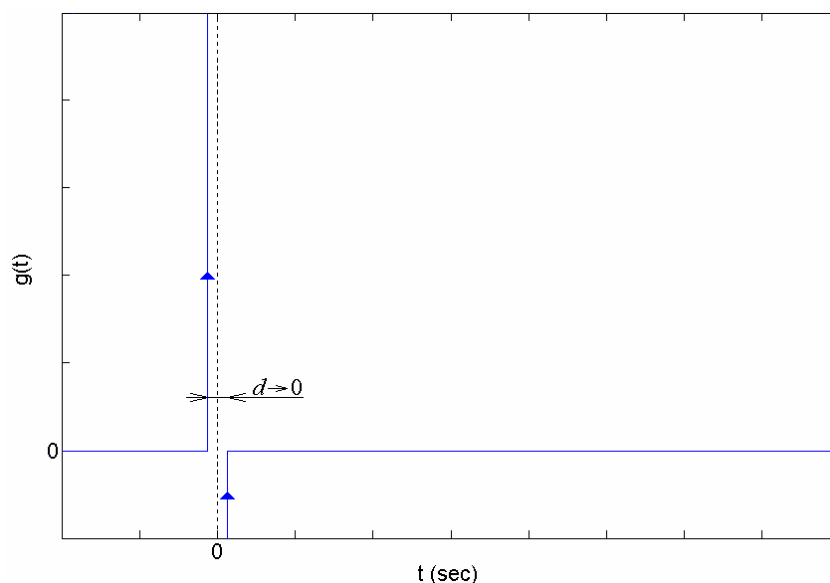


Obr. 3.32: Frekvenční charakteristika derivačního systému v logaritmických souřadnicích

**Amplitudovou charakteristiku** určuje rovnice přímky se sklonem  $+20\text{dB/dek}$ . Bod, kterým přímka se sklonem  $+20\text{dB/dek}$  prochází, lze získat dosazením  $\omega = 1$  do výše uvedené rovnice, amplituda v bodě  $\omega = 1$  pak bude  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k_d$ . **Fázová charakteristika** bude přímka rovnoběžná s osou  $\omega$  v bodě  $+90^\circ$  ( $\pi/2$ ).

Odezva **integračního systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je funkce Diracova impulsu 2. řádu, která je znázorněna na obr. 3.33. Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{k_d s\}$$



Obr. 3.33: Odezva derivačního systému na jednotkový impuls

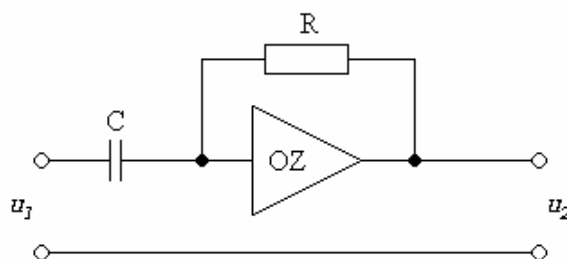
Odezva **derivačního systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je Diracův impuls o ploše  $k_d$ , který není potřeba znovu znázorňovat neboť je znázorněn na obr. 2.6. Funkci přechodové charakteristiky lze opět získat zpětnou Laplaceovou transformací funkce

$$H(s) = \frac{1}{s} k_d s = k_d,$$

kde originál Diracův impuls o ploše  $k_d$ .

Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je **derivační systém** charakterizován **nulou v počátku**.

**Stavový diagram derivačního systému** nelze určit.



Obr. 3.34: Realizace derivačního systému

**Reálný derivační systém** lze realizovat operačním zesilovačem s kapacitou na vstupu (obr. 3.34). Každý takový systém je ovšem zatížen určitou setrvačností. Příkladem reálného derivačního systému je tachodynamo, které se svými vlastnostmi blíží ideálnímu derivačnímu systému.



### Řešený příklad

#### Příklad 3.2.3

Zadání:

*Popište rovnicemi dynamické vlastnosti derivačního tachodynamu.*

Řešení:

Pro derivační tachodynamo platí rovnice

$$u_r(t) = k \cdot \omega(t)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)$$

kde

$\varphi(t)$  je úhlové natočení

$\omega(t)$  je rychlost otáčení

Uvedený popis platí jestliže se zanedbá malá nenulová časová konstanta tachodynamu, tzn. že se zanedbá jeho setrvačnost.

Konec příkladu

#### □ Reálný derivační systém

**Reálný derivační systém** je realizován již **spojením dvou základních systémů** a to **derivačního** a **setrvačního** systému.

**Přenosovou funkcí reálného derivačního systému** lze získat sériovým spojením přenosu derivačního a setrvačního systému, kde  $k_d$  je zesílení systému a  $\varepsilon$  je časová konstanta systému:

$$G(s) = \frac{k_d \cdot s}{\varepsilon \cdot s + 1}.$$

Pro určení **modulu frekvenčního přenosu** lze použít vztahu, že výsledný modul je roven součinu modulů prvků, ze kterých je systém sestaven. Výsledný tvar **modulu** frekvenčního přenosu je následující

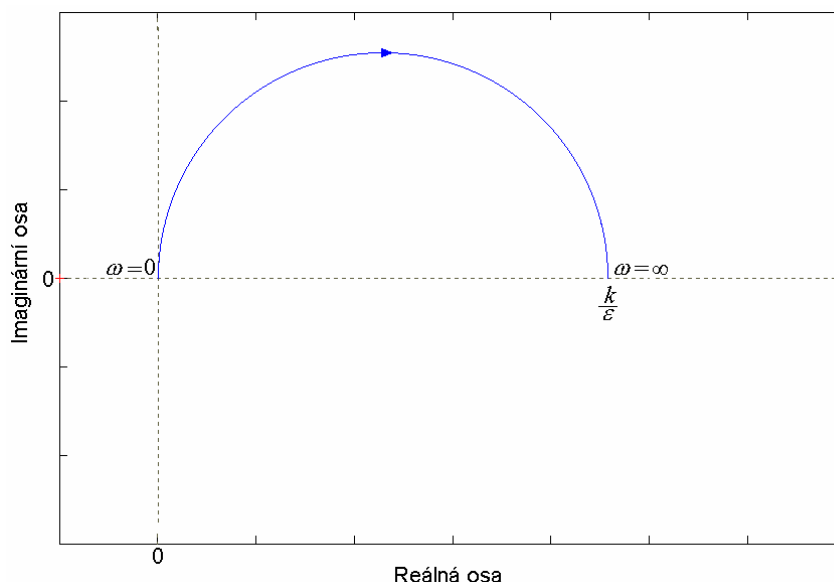
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon^2 + 1}} \cdot k_d \omega = \frac{k_d \omega}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon^2 + 1}},$$

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota amplitudy** následující

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k_d \omega}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon^2 + 1}} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k_d \omega}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon^2 + 1}} = \frac{k_d}{\varepsilon}$$

Pro určení funkce **fáze frekvenčního přenosu** lze použít vztahu, že výsledná fáze je rovna součtu fází členů ze kterých je systém sestaven. Výsledný tvar funkce fáze je následující

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega \cdot \varepsilon) + \frac{\pi}{2}.$$



Obr. 3.35: Frekvenční charakteristika reálného derivačního systému v komplexní rovině

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota fáze** následující

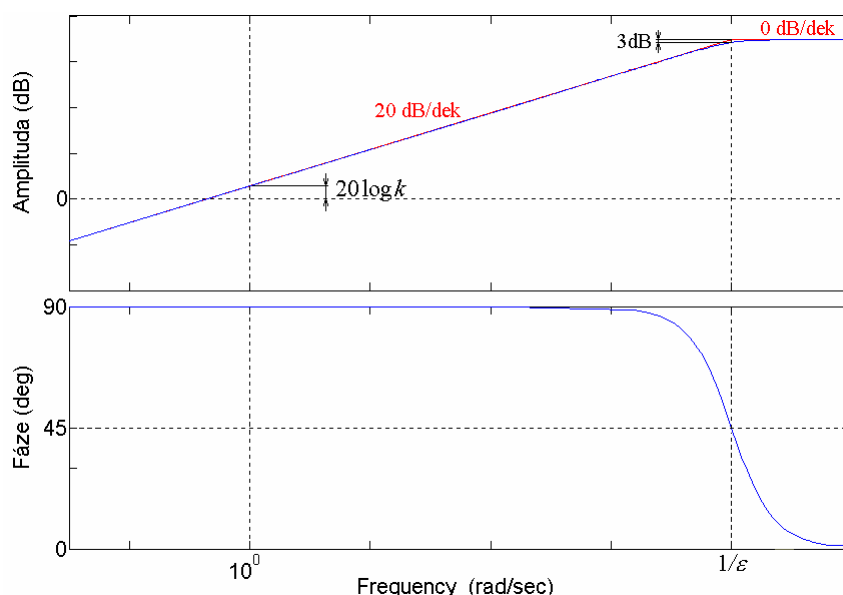
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (-\arctan(\omega \cdot \varepsilon) + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-\arctan(\omega \cdot \varepsilon) + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$0 \leq \omega \leq \infty \text{ je } 90^\circ \geq \varphi \geq 0^\circ,$$

pro bod charakteristiky, kdy úhlová frekvence je rovna převrácené hodnotě časové konstanty soustavy platí

$$\omega \cdot \varepsilon = 1 \text{ je } \varphi = 45^\circ$$

**Frekvenční charakteristika reálného derivačního systému v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.35, frekvenční charakteristiku představuje půlkružnice v prvním kvadrantu, která vychází z bodu 0 a fáze je rovna  $90^\circ$  a končí v bodě  $k_d / \varepsilon$ , kdy fáze je  $0^\circ$ , což vyplývá s předcházejících vztahů pro počáteční a koncovou hodnotu funkce.



Obr. 3.36: Frekvenční charakteristika reálného derivačního systému v logaritmických souřadnicích

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika reálného derivačního systému** je znázorněna na obr.3.36 a je určena následujícím vztahem pro amplitudovou charakteristiku:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k_d + 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\varepsilon^2 \omega^2 + 1}.$$

**Fázovou charakteristiku** lze získat jako součet fázových charakteristik derivačního a setrvačného systému

$$\varphi(j\omega) = \pi/2 - \arctan(\omega \cdot \varepsilon).$$

Odezva **reálného derivačního systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je znázorněna na obr. 3.37. Funkci přechodové charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací z obrazu přechodové charakteristiky

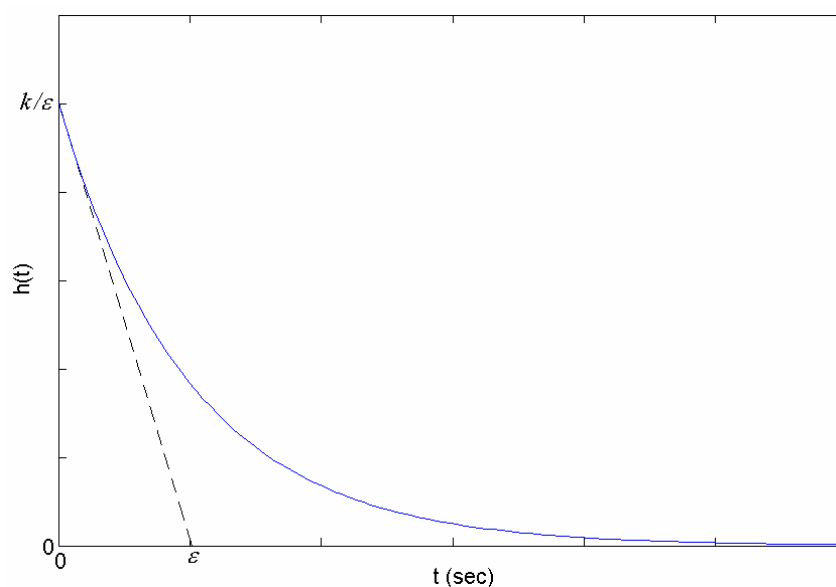
$$H(s) = \frac{k_d \cdot s}{\varepsilon \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k_d}{\varepsilon \cdot s + 1},$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k_d}{\varepsilon s + 1} \right\} = \frac{k_d}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{k_d}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} = \frac{k_d}{\varepsilon}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_d}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} = 0$$



Obr. 3.37: Odezva reálného derivačního systému na jednotkový skok

Odezva **reálného derivačního systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je znázorněna na obr. 3.38. Časový průběh impulsní charakteristiky lze získat na základě převodních vztahů derivací přechodové charakteristiky

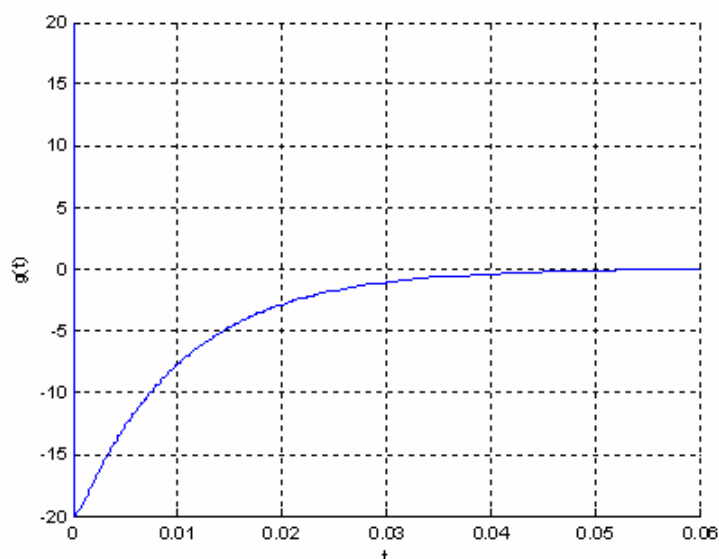
$$g(t) = \dot{h}(t) = -\frac{k_d}{\varepsilon^2} e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{k_d}{\varepsilon^2} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} = -\frac{k_d}{\varepsilon^2}$$

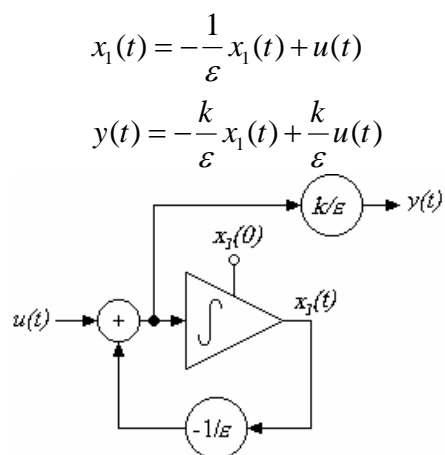
$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{k_d}{\varepsilon^2} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} = 0$$

Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je **derivační systém** charakterizován **nulou v počátku** a jedním **pólem na záporné reálné poloose** ve vzdálenosti  $1/\varepsilon$  od počátku.

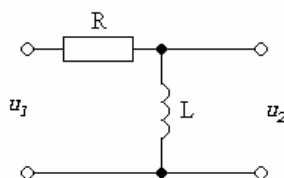


Obr. 3.38: Odezva reálného derivačního systému na jednotkový impuls

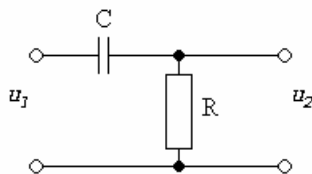
**Stavový diagram** lze odvodit z rovnic popisujících reálný derivační systém a je znázorněn na obr. 3.39.



Obr. 3.39: Stavový diagram (vnitřní popis) reálného derivačního systému



Obr. 3.40: Realizace reálného derivačního členu pomocí rezistoru a indukčnosti



Obr. 3.41: Realizace reálného derivačního členu pomocí rezistoru a kapacity

**Reálný derivační systém** lze realizovat pomocí RC (obr. 3.40) nebo RL obvodu (obr. 3.41) obdobně jako setrvačný systém, který je jeho součástí.



### Řešený příklad

#### Příklad 3.2.4

*Zadání:*

Je zadán RC filtr podle obr.3.41 jehož odpor  $R = 500 \text{ k}\Omega$  a kapacita  $C = 0,02 \text{ }\mu\text{F}$ . Určete časovou konstantu a znázorněte jeho impulsní a přechodovou charakteristiku pomocí Matlabu a Simulinku.

*Řešení:*

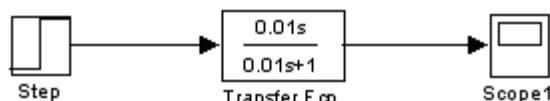
Časová konstanta se určí následovně

$$T = R \cdot C = 5 \cdot 10^5 \cdot 0,02 \cdot 10^{-6} = 0,01$$

Přenos zadaného filtru bude mít následující tvar

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{\frac{1}{C \cdot s} + R} = \frac{RC \cdot s}{1 + RC \cdot s} = \frac{0,01 \cdot s}{0,01 \cdot s + 1}.$$

Uvedený přenos se namodeluje v Simulinku (obr.3.42) a přivede se na jeho vstup jednak jednotkový impuls a jednak jednotkový skok.



Obr. 3.42: Model filtru v Simulinku pro impulsní a přechodovou charakteristiku

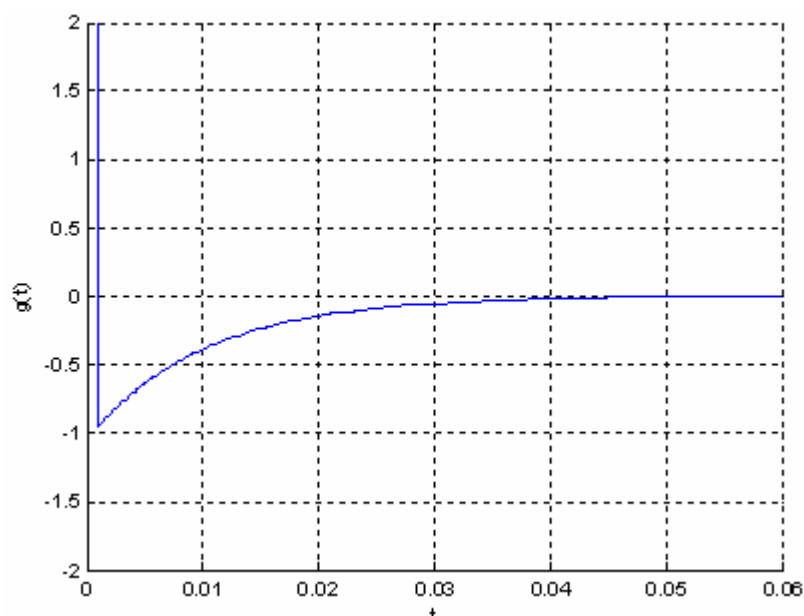
Odezva na reálný jednotkový impuls je znázorněna na obrázku 3.43, ze kterého je zřejmá konečná amplituda a šířka impulsu. Neboť pro ideální jednotkový impuls lze určit počáteční a koncovou hodnotu impulsní charakteristiky následovně

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = -\frac{k_d}{\varepsilon^2} = -\frac{0,01}{0,01^2} = -100, \quad g(\infty) = 0,$$

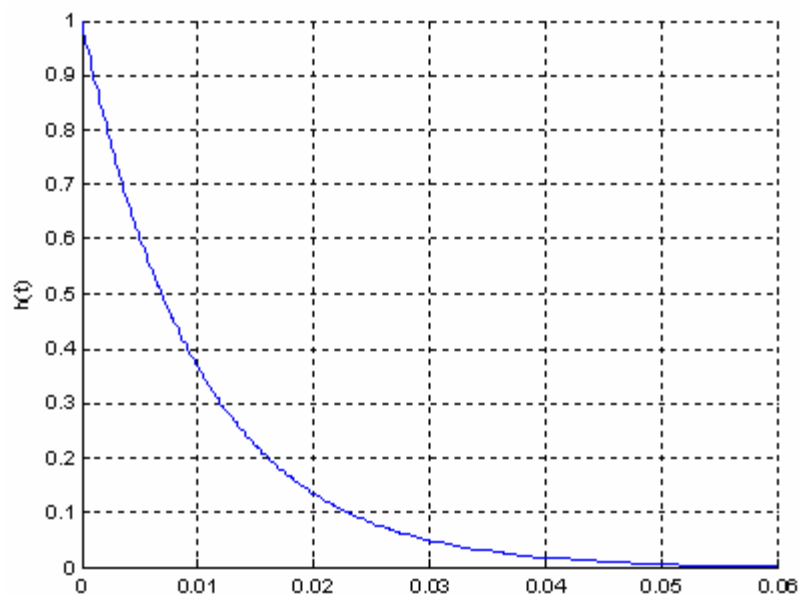
čím více se bude zmenšovat šířka vstupního impulsu a zároveň zvětšovat jeho amplituda tím více lze se přiblížit ideální impulsní charakteristice, viz obr 3.38.

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = h(0) = \frac{k_d}{\varepsilon} = \frac{0,01}{0,01} = 1, \quad h(\infty) = 0$$



Obr. 3.43: Odezva zadaného RC filtru na reálný jednotkový impuls



Obr. 3.44: Odezva zadaného RC filtru na jednotkový skok

Počáteční i koncová hodnota odezvy na ideální jednotkový skok odpovídá počáteční a koncové hodnotě získané přechodové charakteristice na obrázku 3.44.

*Konec příkladu.*

#### □ Statický systém druhého řádu

**Statický systém druhého řádu** bude popsán všemi dříve uvedenými způsoby pro lineární spojité systémy.

Popis **diferenciální rovnicí** 2. řádu lze zapsat v následujícím tvaru pro případ, že  $b_0 = 1$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice



$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}$$

kde

$$K = \frac{b_0}{a_0} \text{ je zesílení}$$

$$T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \text{ je časová konstanta}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \text{ je poměrné tlumení}$$

Je-li velikost **poměrného tlumení**  $\xi \geq 0$  pak mohou být **póly přenosu**:

- **záporné reálné různé**
- **záporné reálné stejné**
- **komplexně sdružené se zápornou reálnou částí**
- **komplexně sdružené ryze imaginární**

Podle velikosti **poměrného tlumení**  $\xi$  pak lze statické systémy druhého řádu rozdělit na

- **přetlumený systém**
- **systém na mezi aperiodicity**
- **kmitavý systém tlumený**
- **kmitavý systém s harmonickými kmity**

#### □ Přetlumený statický systém druhého řádu

Pro **přetlumený systém druhého řádu** platí, že **poměrné tlumení** je  $\xi > 1$  a **póly** jsou **různé reálné záporné** podle následujícího vztahu

$$p_{1,2} = -\frac{1}{T}(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) = \begin{cases} -\frac{1}{T_1} \\ -\frac{1}{T_2} \end{cases}$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice a po dosazení za kořeny a úpravě do tvaru s časovými konstantami bude platit

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

**Frekvenční přenosová funkce** po dosazení za  $s = j\omega$  bude následující

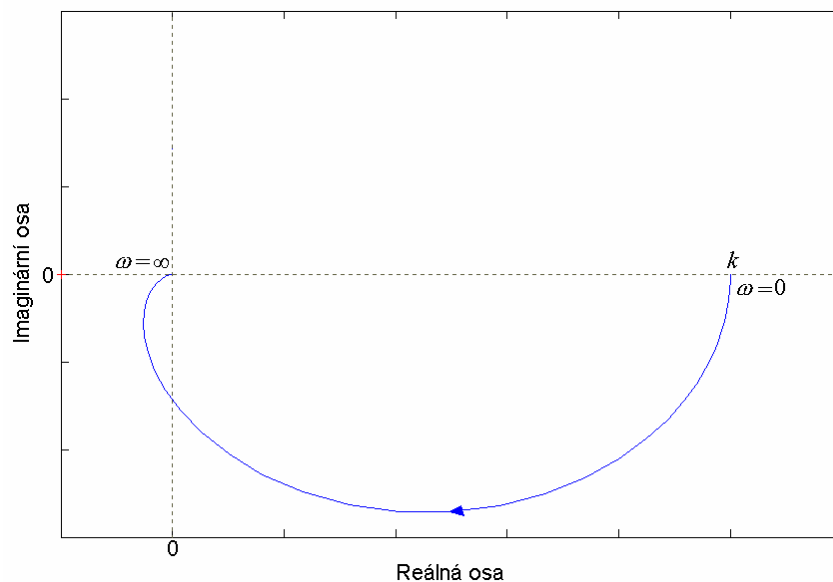
$$G(j\omega) = \frac{K}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}$$

Z přenosové funkce je zřejmé, že **přetlumený systém** tvoří **dva sériově spojené setrvačné systémy** prvního řádu. Na základě toho lze jednoduše určit **modul - amplitudu přenosu** přetlumeného systému jako **součin dvou modulů** setrvačných systémů, z nichž jeden má zesílení  $K$  a druhý má zesílení rovno jedné

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}$$

**Fázi přenosu** přetlumeného systému lze určit jako součet fází obou setrvačných systémů

$$\varphi(j\omega) = -\varphi_1(j\omega) - \varphi_2(j\omega) = -\arctan T_1 \omega - \arctan T_2 \omega.$$



Obr. 3.45: Frekvenční charakteristika přetlumeného systému v komplexní rovině

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota amplitudy** následující

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} = K, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} = 0$$

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota fáze** následující

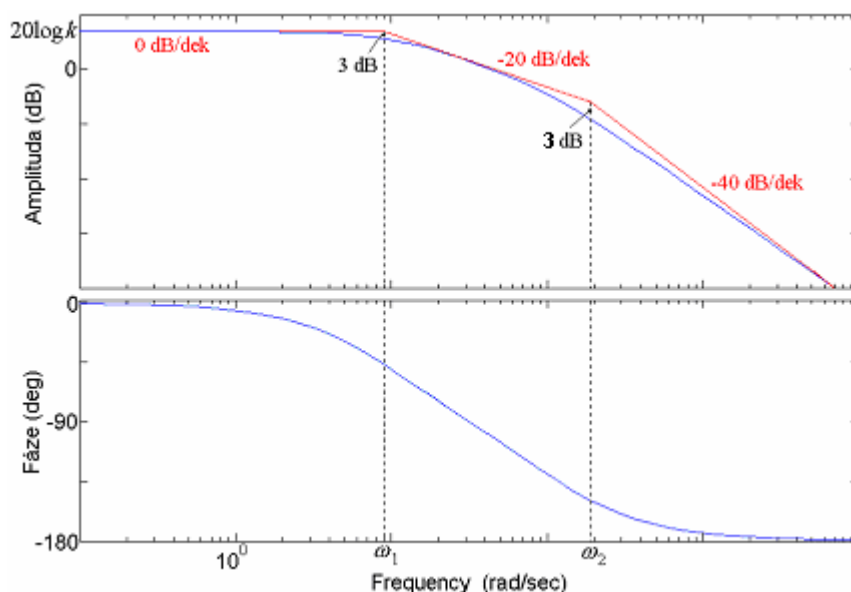
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (-\arctan T_1 \omega - \arctan T_2 \omega) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-\arctan T_1 \omega - \arctan T_2 \omega) = -\pi$$

$$0 \leq \omega \leq \infty \text{ je } 0 \geq \varphi \geq -180^\circ.$$

**Frekvenční charakteristika přetlumeného systému v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.45, frekvenční charakteristiku představuje křivka v třetím a čtvrtém kvadrantu, která vychází z bodu  $K$  a fáze je rovna  $0^\circ$  a končí v bodě  $0$ , kdy fáze je  $-180^\circ$ .

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika přetlumeného systému** je znázorněna na obr.3.46 a je určena následujícím vztahem pro amplitudovou charakteristiku:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} - 20 \log \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}$$



Obr. 3.46: Frekvenční charakteristika přetlumeného systému v logaritmických souřadnicích

Pro vynesení frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích je opět vhodné nejprve určit **asymptoty** této **charakteristiky**. Uvedený vťah lze zjednodušit pro malé frekvence vzhledem k frekvenci odpovídající převrácené hodnotě větší časové konstanty, dále pro velké frekvence vzhledem k frekvenci odpovídající převrácené hodnotě menší časové konstanty a pro frekvence mezi těmito dvěma hodnotami. Takto se vytvoří na ose frekvencí tři oblasti. Tyto tři oblasti lze získat rovněž součtem asymptot dvou setrvačných systémů:

- $0 < \omega < \frac{1}{T_1}$   $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K$
- $\frac{1}{T_1} < \omega < \frac{1}{T_2}$   $|G(j\omega)|_{dB} \doteq 20 \log K - 20 \log T_1 \omega$
- $\frac{1}{T_2} < \omega < \infty$   $|G(j\omega)|_{dB} \doteq 20 \log K - 20 \log T_1 \omega - 20 \log T_2 \omega$

Takto lze získat tři aproximační přímky, **asymptoty**, jejichž průsečíky jsou v **bodech zlomu frekvenční charakteristiky**  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$  a  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ , ve kterých je největší odchylka (největší chyba) od skutečné hodnoty frekvenční charakteristiky. **Velikost chyby** lze vypočítat obdobně jako pro setrvačný systém, chyba v **obou bodech zlomu** je **3 dB**.

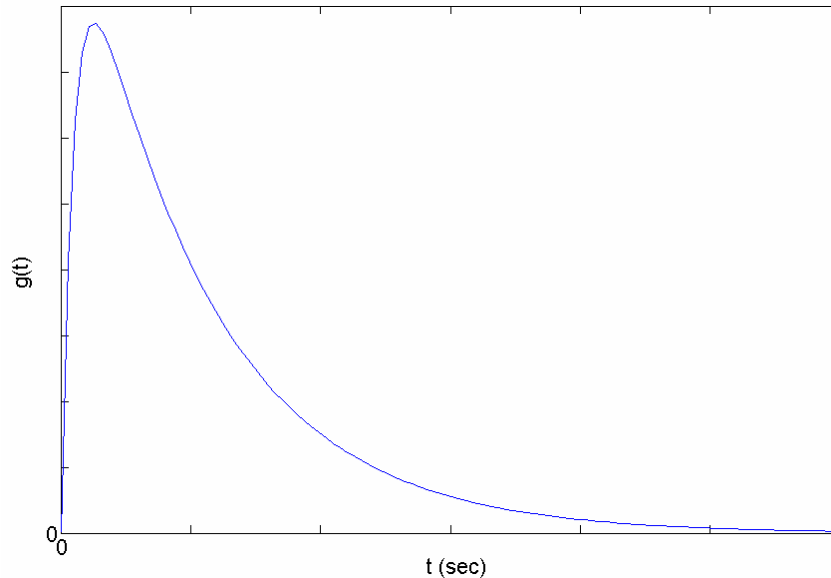
Odezva **přetlumeného systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je znázorněna na obr. 3.47. Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right\} = \frac{K}{T_1 - T_2} \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K}{T_1 - T_2} \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{T_1 - T_2} \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) = 0$$



Obr. 3.47: Odezva přetlumeného systému na jednotkový impuls

Odezva **přetlumeného systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je znázorněna na obr. 3.48. Funkci přechodové charakteristiky lze opět získat zpětnou Laplaceovou transformací funkce

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right\} = K \left[ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right].$$

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky následující

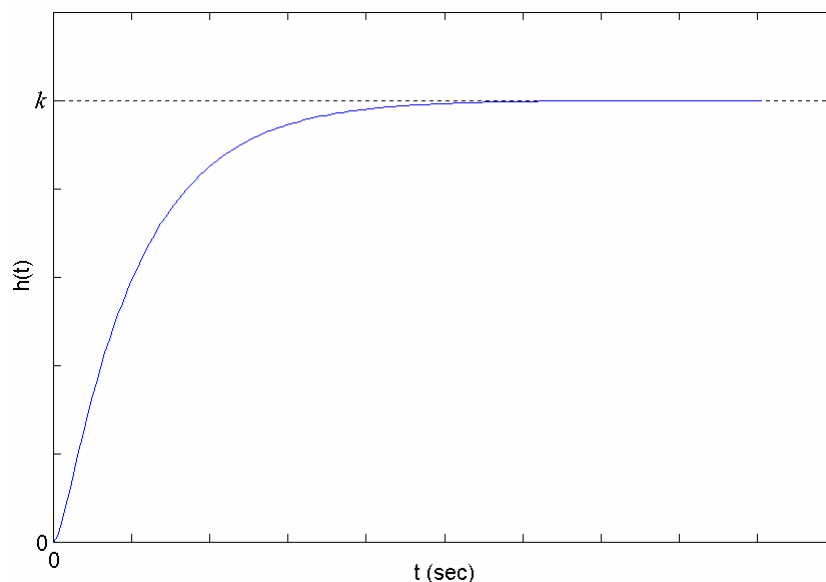
$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} K \left[ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K \left[ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right] = K$$

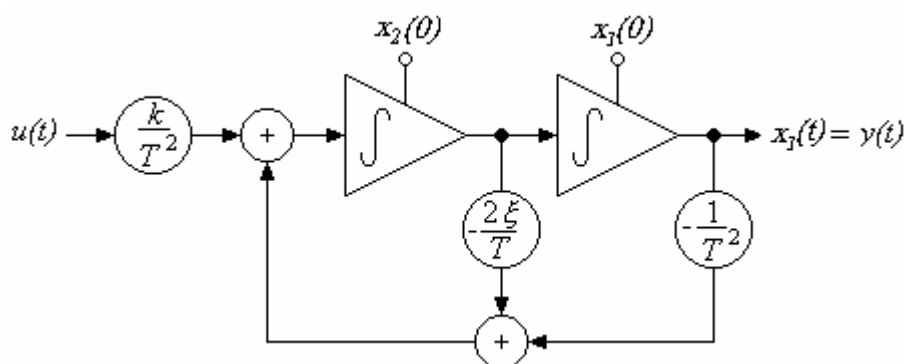
Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je přetlumený systém charakterizován **dvěma póly na záporné reálné poloose** ve vzdálenosti  $1/T_1$  a  $1/T_2$  od počátku.

Pro znázornění **stavového diagramu** lze upravit dříve uvedenou diferenciální rovnici a následovně sestavit stavový diagram **pro obecný systém druhého řádu**, který je znázorněn na obr. 3.49. Pro přetlumený systém lze použít **spojení stavových diagramů dvou setrvačných systémů**, který je znázorněn na obr. 3.50.

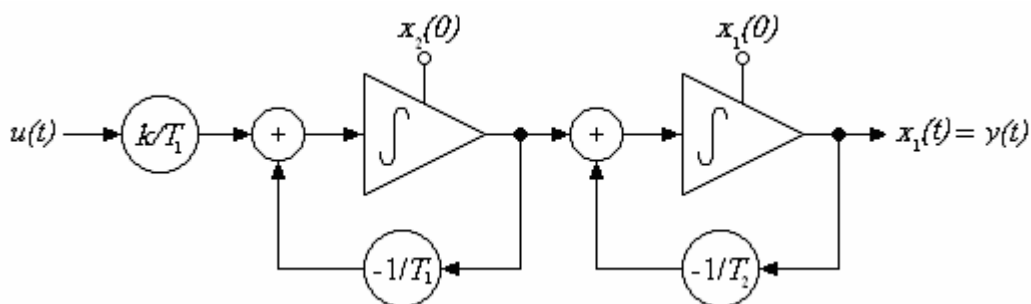
**Reálný přetlumený systém** lze jednoduše realizovat pomocí dvou RC nebo RL obvodů. Vlastnosti většiny reálných systémů lze v praxi právě popsat vlastnostmi přetlumeného systému druhého řádu.



Obr. 3.48: Odezva přetlumeného systému na jednotkový skok



Obr. 3.49: Stavový diagram (pro vnitřní popis) systému druhého řádu

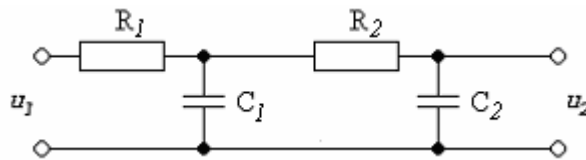


Obr. 3.50: Stavový diagram (pro vnitřní popis) přetlumeného systému druhého řádu

**Řešený příklad****Příklad 3.2.5**

Zadání:

Je zadán dvojitý RC filtr znázorněný na obr.3.51 jehož odpor  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$  a kapacita  $C_1 = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$  a  $R_2 = 500 \text{ k}\Omega$  a kapacita  $C_2 = 0,3 \text{ }\mu\text{F}$ . Určete časové konstanty a znázorněte jeho frekvenční, impulsní a přechodovou charakteristiku pomocí Matlabu a Simulinku.



Obr. 3.51: Dvojitý RC filtr jako přetlumený systém druhého řádu

Řešení:

Časové konstanty se určí následovně

$$T_1 = R_1 \cdot C_1 = 1 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,5$$

$$T_2 = R_2 \cdot C_2 = 0,5 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6} = 0,15$$

Přenos zadaného filtru bude mít následující tvar

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2 \cdot s + 1} = \frac{1}{(0,5 \cdot s + 1)(0,15 \cdot s + 1)}.$$

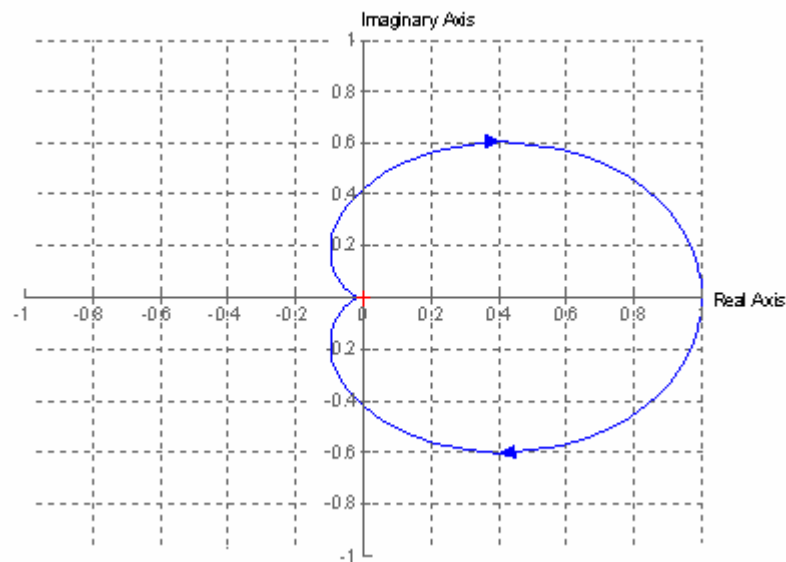
Na základě zadání následujících příkazů v Matlabu

```

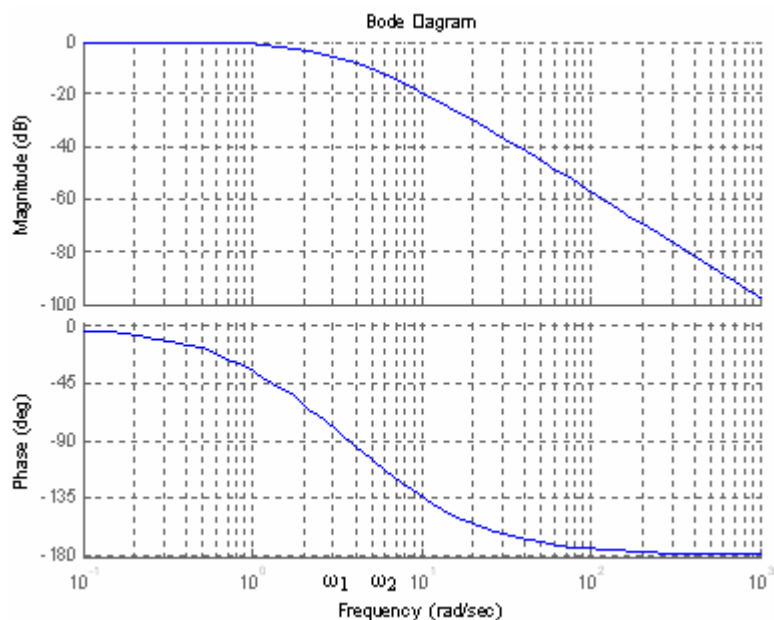
b=[1]
a=[0.075 0.65 1]
g=tf(b,a)
nyquist(g)
bode(g)

```

lze získat frekvenční charakteristiku v komplexní rovině (obr. 3.52) a LAF charakteristiku (obr. 3.53), kde frekvence zlomu jsou  $\omega_1 = 2$  a  $\omega_2 = 6,66$ .

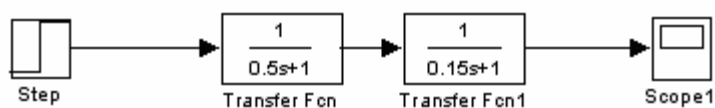


Obr. 3.52: Frekvenční charakteristika dvojitého RC filtru, přetlumeného systému druhého řádu

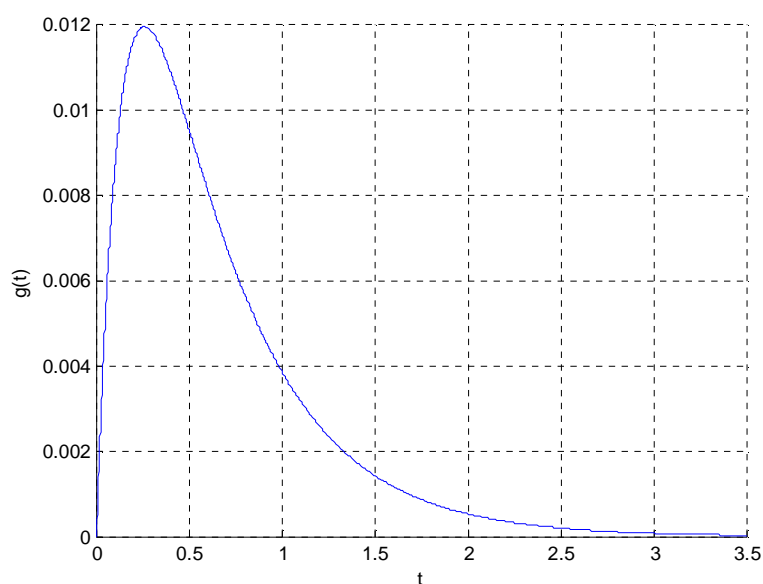


Obr. 3.53: Logaritmická amplitudová a fázová frekvenční charakteristika dvojitého RC filtru, přetlumeného systému druhého řádu

Pro získání impulsní a přechodové charakteristiky se uvedený přenos namodeluje v Simulinku (obr.3.54) a přivede se na jeho vstup jednak jednotkový impuls a jednak jednotkový skok.



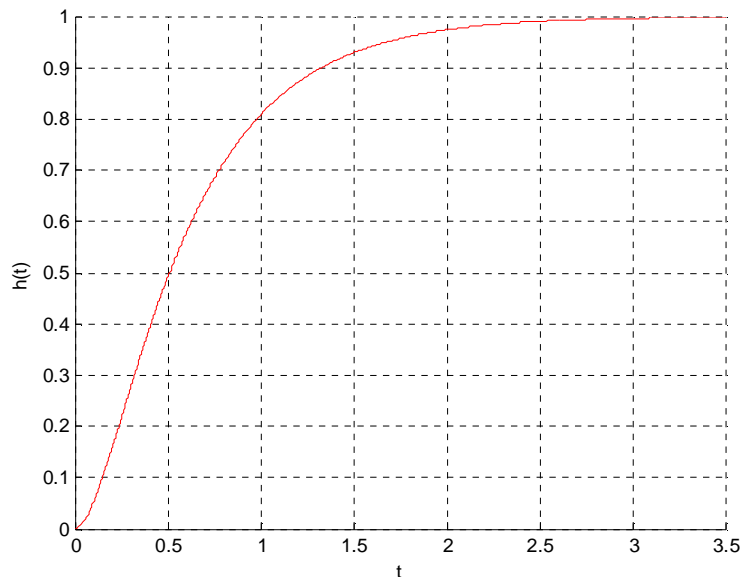
Obr. 3.54: Model dvou filtrů v Simulinku pro impulsní a přechodovou charakteristiku



Obr. 3.55: Odezva zadaného dvojitého RC filtru na reálný jednotkový impuls

Odezva na reálný jednotkový impuls je znázorněna na obrázku 3.55. Počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky bude nulová, jak bylo odvozeno v popisu přetlumeného systému

$$g(0) = 0, \quad g(\infty) = 0,$$



Obr. 3.56: Odezva zadaného dvojitého RC filtru na jednotkový skok

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky následující

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) = K = 1$$

Počáteční i koncová hodnota odezvy na jednotkový skok odpovídá počáteční a koncové hodnotě získané přechodové charakteristice na obrázku 3.56.

*Konec příkladu.*

#### □ **Systém na mezi aperiodicity**

Pro **systém druhého řádu na mezi aperiodicity** platí, že **poměrné tlumení** je rovno jedné,  $\xi = 1$ , a **póly** jsou **reálné záporné shodné**, neboli polynom ve jmenovateli má **dvojnásobný kořen**

$$p_{1,2} = -\frac{1}{T}$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice druhého řádu a po dosazení za kořeny a úpravě do tvaru s časovými konstantami bude platit

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2Ts + 1} = \frac{K}{(Ts + 1)^2}$$

**Frekvenční přenos** lze získat po dosazení za  $s = j\omega$  a bude následující

$$G(s) = \frac{K}{(Tj\omega + 1)^2}.$$



Z přenosové funkce je zřejmé, že **aperiodický systém** tvoří **dva sériově spojené shodné setrvačné systémy** prvního řádu. Na základě toho lze určit **modul - amplitudu přenosu** přetlumeného systému jako **součin dvou modulů** shodných setrvačných systémů, z nichž jeden má zesílení  $K$  a druhý má zesílení rovno jedné

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1}$$

**Fázi přenosu** aperiodického systému lze určit jako součet fází obou shodných setrvačných systémů

$$\varphi(j\omega) = -\varphi_1(j\omega) - \varphi_2(j\omega) = -\arctan T\omega - \arctan T\omega = -2 \cdot \arctan T\omega.$$

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota amplitudy a fáze** shodné s přetlumeným systémem druhého řádu.

**Frekvenční charakteristika aperiodického systému v komplexní rovině** je obdobná jako u přetlumeného systému a je znázorněna na obr. 3.57, frekvenční charakteristiku představuje křivka v třetím a čtvrtém kvadrantu, která vychází z bodu  $K$  a fáze je rovna  $0^\circ$  a končí v bodě 0, kdy fáze je  $-180^\circ$ . Tvar bude odlišný poněvadž pro  $\omega = 1/T$  bude platit,

$$\varphi(\omega_0) = -90^\circ$$

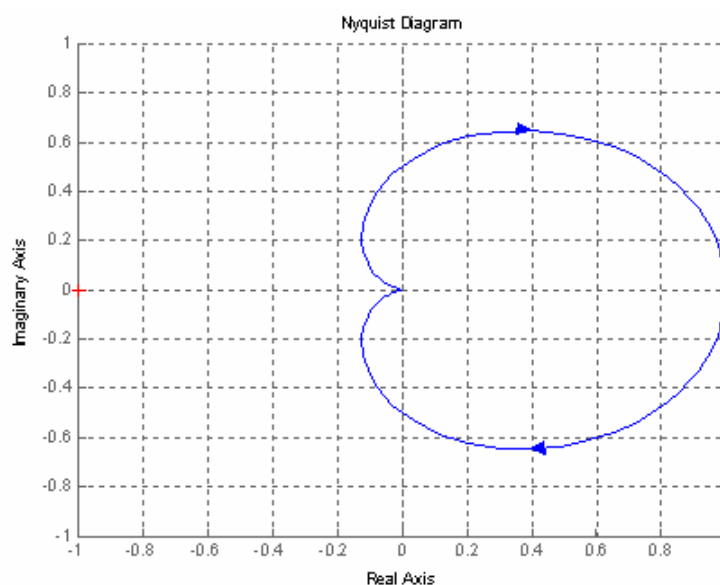
$$|G(j\omega_0)| = 0,5K$$

což je bod na záporné imaginární ose. Na obrázku 3.57 je zobrazena frekvenční charakteristika aperiodického systému s časovou konstantou rovnou jedné,  $T=1$ , a zesílením  $K=1$ . Imaginární osu tedy protíná frekvenční charakteristika v bodě  $-0,5j$ .

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika aperiodického systému** je znázorněna na obr.3.58 a je určena následujícím vztahem pro amplitudovou charakteristiku:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 20\log\sqrt{T^2\omega^2 + 1} - 20\log\sqrt{T^2\omega^2 + 1} = 20\log K - 40\log\sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

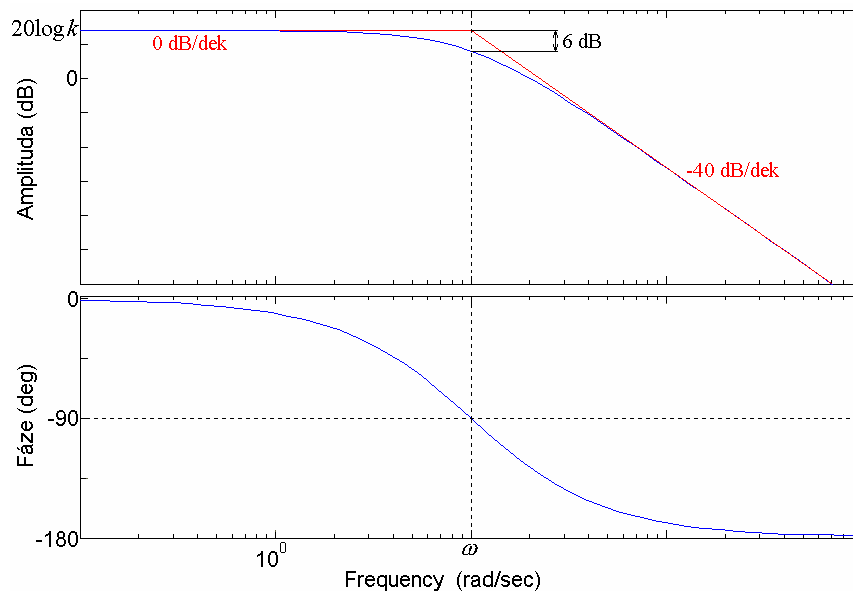
Pro vynesení frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích je opět vhodné nejprve určit **asymptoty této charakteristiky**. Uvedený vztah lze zjednodušit pro malé frekvence vzhledem k frekvenci odpovídající převrácené hodnotě časové konstanty  $T$ , dále pro velké frekvence vzhledem k frekvenci odpovídající převrácené hodnotě časové konstanty. Takto se vytvoří na ose frekvencí dvě oblasti.



Obr. 3.57: Frekvenční charakteristika aperiodického systému v komplexní rovině

Tyto dvě oblasti lze získat rovněž součtem asymptot dvou shodných setrvačných systémů a proporcionálního systému se zesílením  $K$ :

- $0 < \omega < \frac{1}{T}$   $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K$
- $\frac{1}{T} < \omega < \infty$   $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 40 \log T\omega$



Obr. 3.58: Frekvenční charakteristika aperiodického systému v logaritmických souřadnicích

Takto lze získat dvě aproximační přímky, **asymptoty**, jejichž průsečík je v **bodě zlomu frekvenční charakteristiky**  $\omega=1/T$ , ve kterém je největší odchylka (největší chyba) od skutečné hodnoty frekvenční charakteristiky. **Velikost chyby** lze vypočítat obdobně jako pro setrvačný systém, chyba v **bodě zlomu** je součtem chyb obou setrvačných systémů se shodným bodem zlomu a je to **6 dB**.

Odezva **aperiodického systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je znázorněna na obr. 3.59. Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{(Ts+1)^2} \right\} = \frac{K}{T^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

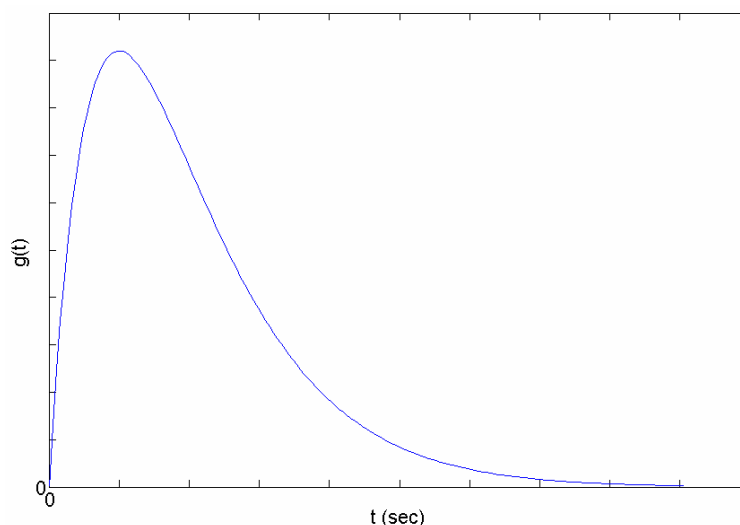
Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K}{T^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T}} = 0$$

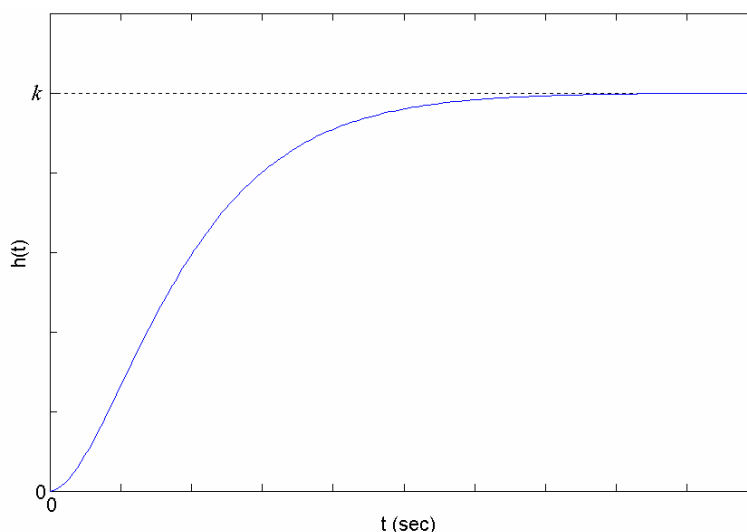
$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{T^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T}} = 0$$

Odezva **aperiodického systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je znázorněna na obr. 3.60. Funkci přechodové charakteristiky lze opět získat zpětnou Laplaceovou transformací funkce

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s(Ts+1)^2} \right\} = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



Obr. 3.59: Odezva aperiodického systému na jednotkový impuls



Obr. 3.60: Odezva aperiodického systému na jednotkový skok

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky následující

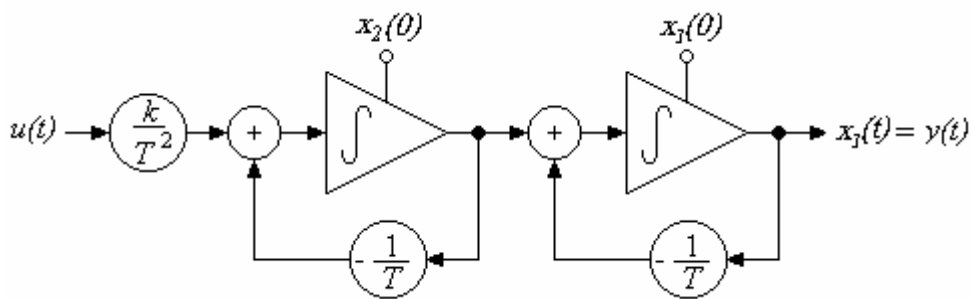
$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) = K$$

Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je aperiodický systém charakterizován **dvojnásobným pólem na záporné reálné poloose** ve vzdálenosti  $1/T$  od počátku.

Pro znázornění **stavového diagramu** lze použít stavový diagram **pro obecný systém druhého řádu**, kde  $\xi=1$  a který je znázorněn na obr. 3.49. Pro aperiodický systém lze použít **spojení stavových diagramů dvou setrvačných systémů**, který je znázorněn na obr. 3.61.

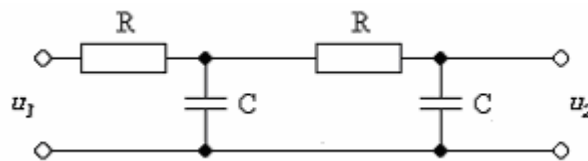
**Reálný aperiodický systém** lze realizovat pomocí dvou shodných RC nebo RL obvodů.



Obr. 3.61: Stavový diagram (pro vnitřní popis) aperiodického systému

**Řešený příklad****Příklad 3.2.6***Zadání:*

Je zadán dvojitý RC filtr znázorněný na obr.3.62 jehož odpory  $R = 1\text{ M}\Omega$  a kapacita  $C = 0,5\text{ }\mu\text{F}$ . Určete časové konstanty a znázorněte jeho frekvenční, impulsní a přechodovou charakteristiku pomocí Matlabu a Simulinku.



Obr. 3.62: Dvojitý RC filtr jako aperiodický systém druhého řádu

*Řešení:*

Časové konstanty se určí následovně

$$T = R \cdot C = 1 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,5$$

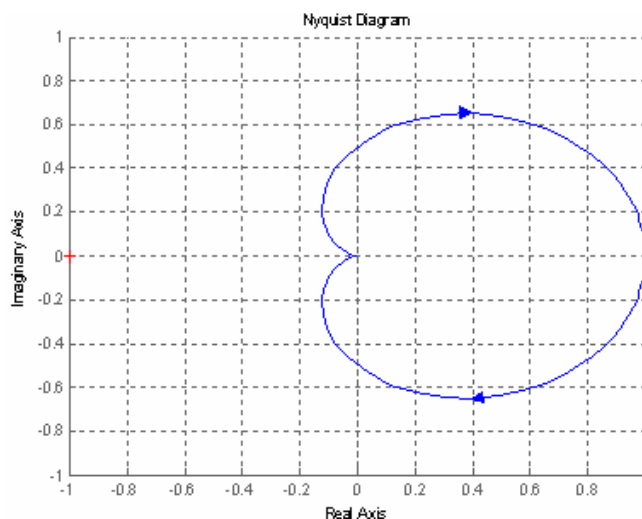
Přenos zadaného filtru bude mít následující tvar

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{(RC \cdot s + 1)^2} = \frac{1}{(0,5 \cdot s + 1)^2}.$$

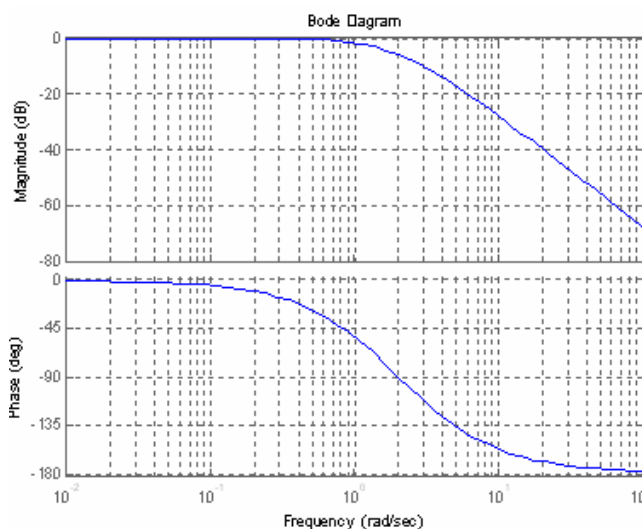
Na základě zadání následujících příkazů v Matlabu

```
b=[1]
a=[0.25 1 1]
g=tf(b,a)
nyquist(g)
bode(g)
```

lze získat frekvenční charakteristiku v komplexní rovině (obr. 3.63) a LAF charakteristiku (obr. 3.64), kde frekvence zlomu je  $\omega = 2$ .

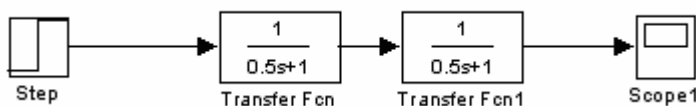


Obr. 3.63: Frekvenční charakteristika dvojitého RC filtru, aperiodického systému druhého řádu



Obr. 3.64: Logaritmická amplitudová a fázová frekvenční charakteristika dvojitého RC filtru, aperiodického systému druhého řádu

Pro získání impulsní a přechodové charakteristiky se uvedený přenos namodeluje v Simulinku (obr.3.65) a přivede se na jeho vstup jednak jednotkový impuls a jednak jednotkový skok.



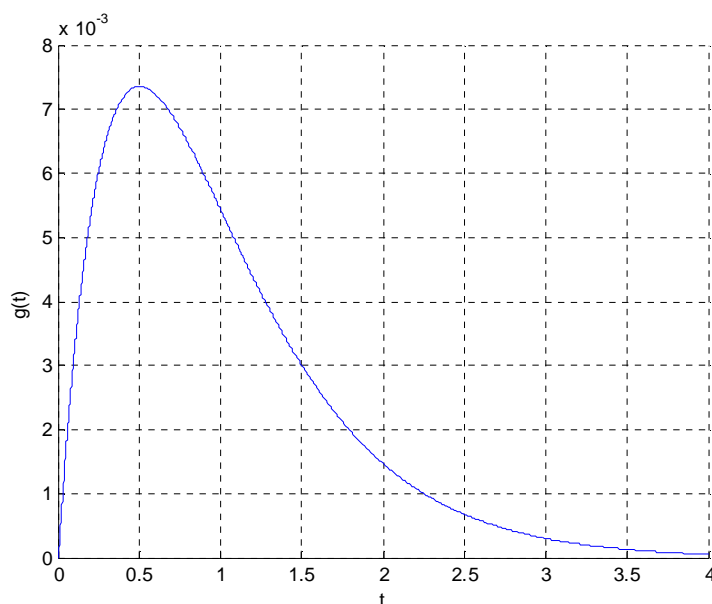
Obr. 3.65: Model dvojitého filtru v Simulinku pro impulsní a přechodovou charakteristiku

Odezva na reálný jednotkový impuls je znázorněna na obrázku 3.66. Počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky bude nulová, jak bylo odvozeno v popisu přetlumeného systému

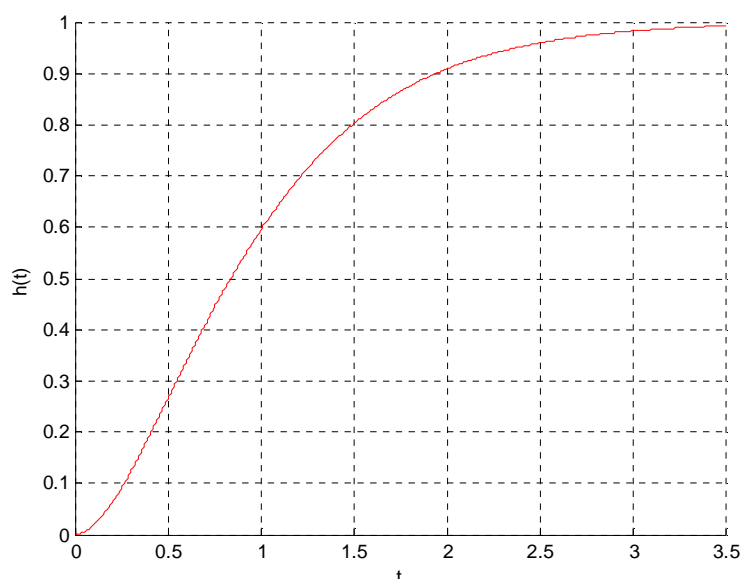
$$g(0) = 0, \quad g(\infty) = 0.$$

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky následující

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) = K = 1$$



Obr. 3.66: Odezva zadaného dvojitého RC filtru na reálný jednotkový impuls



Obr. 3.67: Odezva zadaného dvojitého RC filtru na jednotkový skok

Počáteční i koncová hodnota odezvy na jednotkový skok odpovídá počáteční a koncové hodnotě získané přechodové charakteristice na obrázku 3.67.

*Konec příkladu.*

#### □ Kmitavý tlumený systém

Pro **kmitavý tlumený systém druhého řádu** platí, že **poměrné tlumení** je v rozmezí  $0 < \xi < 1$  a **póly** jsou **komplexně sdružené se zápornou reálnou složkou**

$$p_{1,2} = -\frac{1}{T}(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice a po dosazení za kořeny a úpravě do tvaru s časovou konstantou se získá následující výraz

$$G(s) = \frac{K}{T^2[s + \frac{1}{T}(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})][s + \frac{1}{T}(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})]}$$

**Frekvenční přenos** lze dostat po dosazení za  $s = j\omega$  a pak bude následující

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega}$$

Na základě výše uvedeného výrazu lze určit **modul - amplitudu přenosu kmitavého tlumeného** systému a nebo jako **součin dvou modulů** ekvivalentních dvěma systémům prvního řádu, každý s jedním z komplexně sdružených kořenů, a proporcionálního systému se zesílením  $K$ . Z výše uvedeného tvaru se dostane následující výraz pro modul

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}}.$$

**Fázi frekvenčního přenosu** kmitavého tlumeného systému lze určit podle následujícího vztahu

$$\varphi(j\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}.$$

**Frekvenční charakteristika kmitavého tlumeného systému v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.68, frekvenční charakteristiku představuje křivka probíhající v třetím a čtvrtém kvadrantu, která vychází z bodu  $K$  kde fáze je rovna  $0^\circ$  a končí v bodě  $0$ , kde fáze je rovna  $180^\circ$ . Pro kladné frekvence lze **počáteční a koncovou hodnotu amplitudy** určit následovně

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}} = K, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}} = 0$$

Pro kladné frekvence jsou **počáteční a koncová hodnota fáze** následující

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (-\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}) = -\pi$$

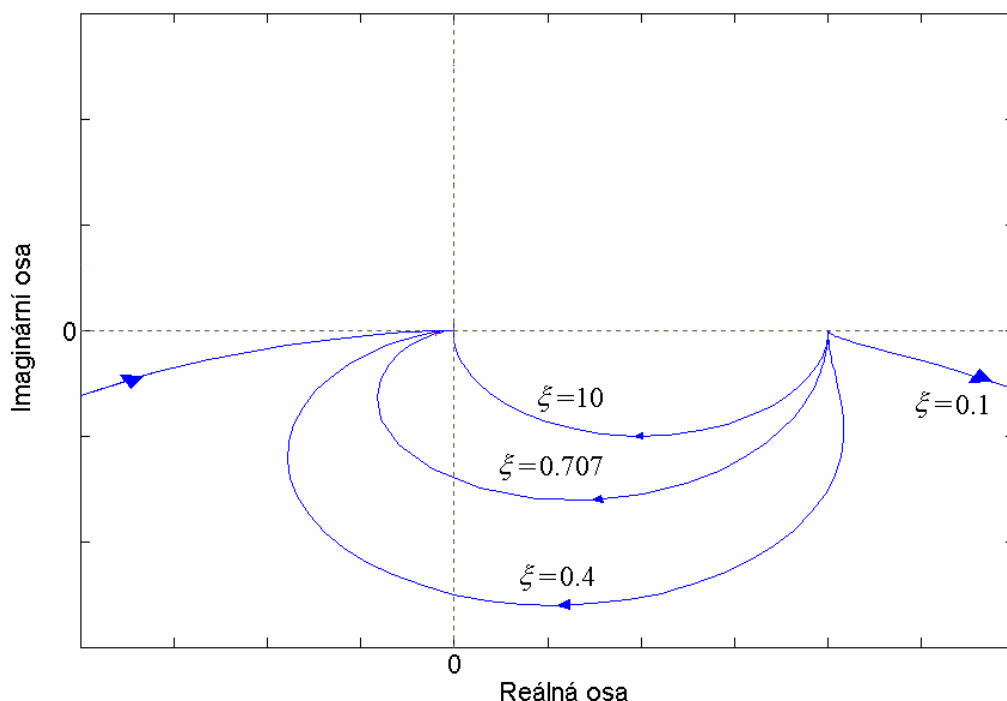
$$0 \leq \omega \leq \infty \quad \text{je} \quad 0 \geq \varphi \geq -180^\circ.$$

Charakteristické pro frekvenční charakteristiku kmitavého tlumeného systému je **rezonanční navýšení amplitudy** oproti hodnotě  $K$  v určitém rozsahu poměrného tlumení  $0 < \xi < 0,707$ , což je zřejmé z obr.3.69. Maximální hodnota amplitudy roste se zmenšujícím se poměrným tlumením  $\xi$  a největší je v bodě rezonančního kmitočtu, který je určen vztahem:

$$\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika kmitavého tlumeného systému** je znázorněna na obr.3.70 a je určena následujícím vztahem pro amplitudovou charakteristiku:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$$



Obr. 3.69: Frekvenční charakteristika kmitavého tlumeného a přetlumeného systému v komplexní rovině pro různá  $\xi$

Pro vynesení frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích je opět vhodné nejprve určit **asymptoty** této **charakteristiky**. Uvedený vťah lze zjednodušit pro malé frekvence vzhledem k frekvenci odpovídající převrácené hodnotě časové konstanty  $T$ , dále pro velké frekvence vzhledem k frekvenci odpovídající převrácené hodnotě časové konstanty, kde nejprve zanedbáme 1 vzhledem k  $T^2\omega^2$  a pak  $4\xi^2$  vzhledem k  $T^2\omega^2$ . Takto se vytvoří na ose frekvencí dvě oblasti s asymptotami danými následujícími rovnicemi:

- $0 < \omega < \frac{1}{T} \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K$
- $\frac{1}{T} < \omega < \infty \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{(4\xi^2 + T^2\omega^2)T^2\omega^2} = 20 \log K - 40 \log T\omega$

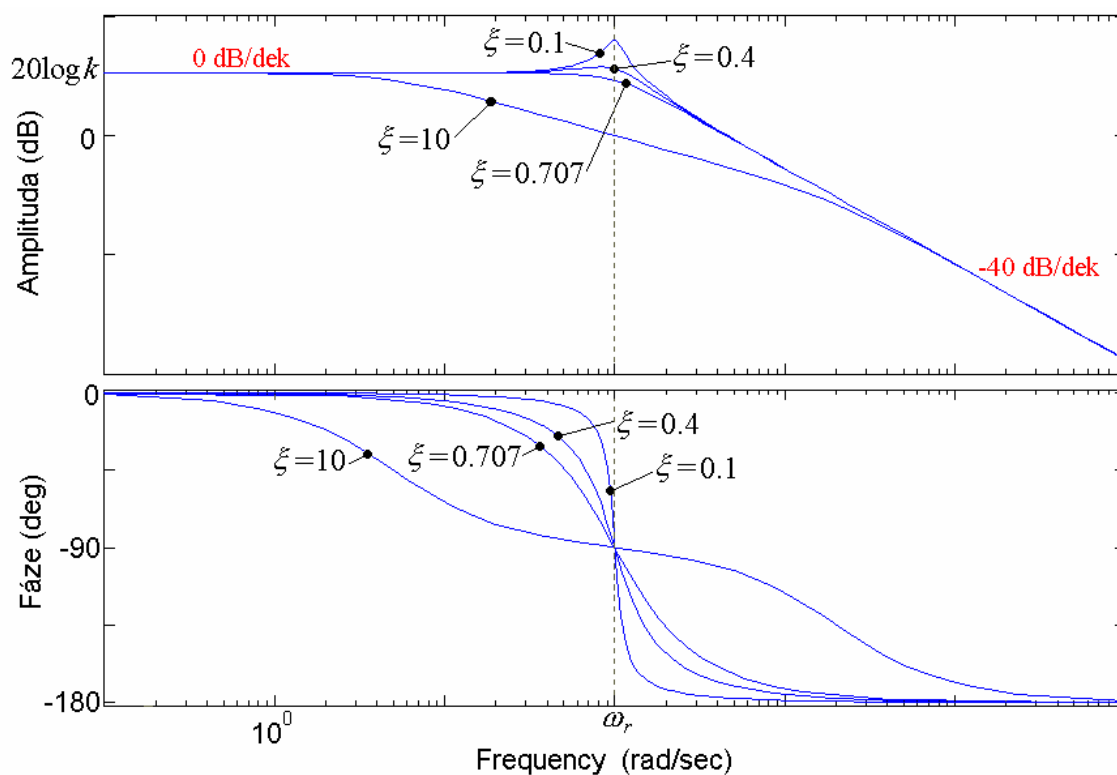
Takto lze získat dvě aproximační přímky, **asymptoty**, jejichž průsečík je v **bodě zlomu frekvenční charakteristiky**  $\omega=1/T$ , ve kterém je tentokrát odchylka od skutečné hodnoty frekvenční charakteristiky proměnná. **Velikost chyby v bodě zlomu** je závislá na velikosti  $\xi$  a závisí na **velikosti rezonančního převýšení** (obr. 3.70).

Odezva **kmitavého tlumeného systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je znázorněna na obr. 3.71, která má tvar tlumených kmitů. Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce:

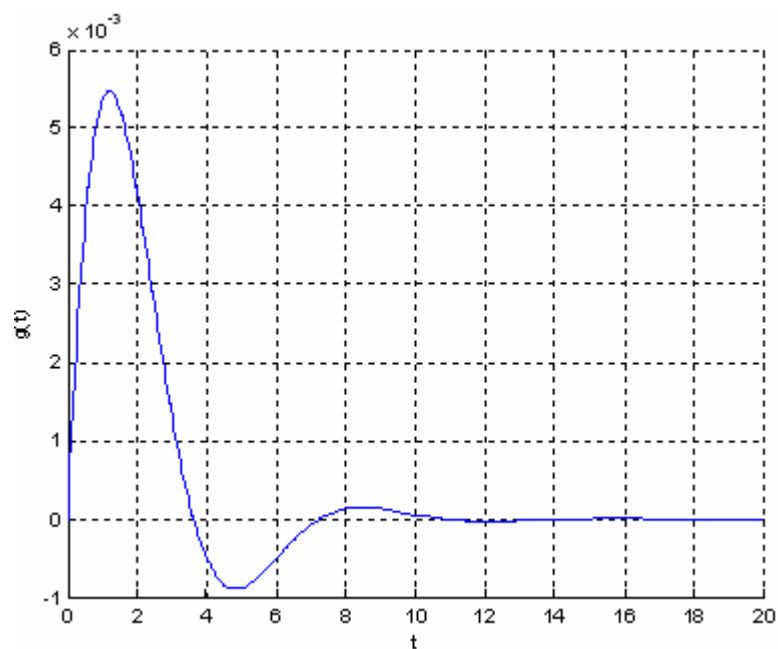
$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)} \right\}$$

$$g(t) = \frac{K}{T} \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t$$





Obr. 3.70: Frekvenční charakteristika kmitavého tlumeného a přetlumeného systému v logaritmických souřadnicích pro různá  $\xi$

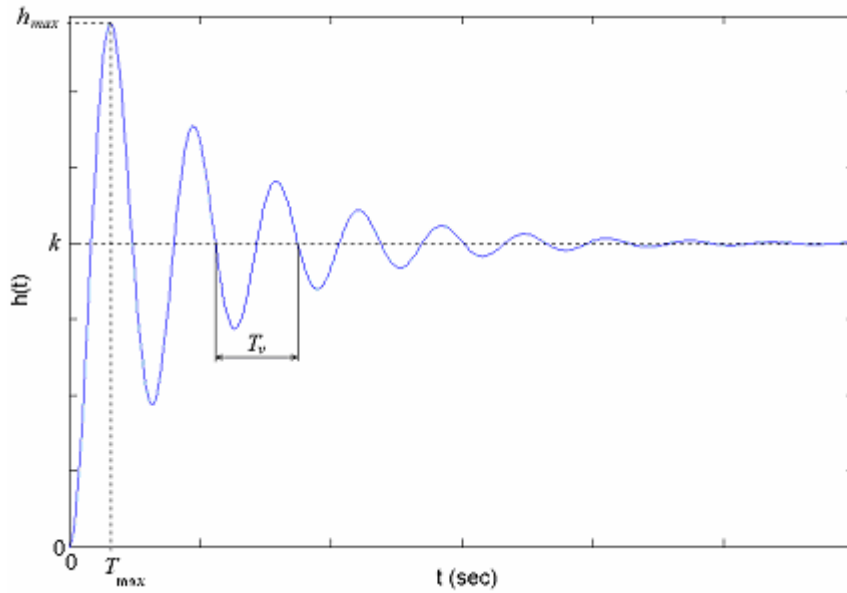


Obr. 3.71: Impulsní charakteristika kmitavého tlumeného systému

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K}{T} \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{T} \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t = 0$$



Obr. 3.72: Odezva kmitavého tlumeného systému na jednotkový skok

Odezva **kmitavého tlumeného systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je znázorněna na obr. 3.72 má tvar tlumených kmitů. Funkci popisující průběh přechodové charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)} \right\}$$

$$h(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \phi \right) \right]$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky následující

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} K \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \phi \right) \right] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \phi \right) \right] = K$$

Pro vyznačené veličiny, které jsou **charakteristické pro kmitavý tlumený systém** a jsou vyznačeny v obr. 3.72, platí následující vztahy:

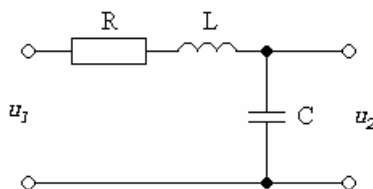
- $t_{\max} = T\pi$  **doba odpovídající maximálnímu překmitu**

- $h_{\max} = K \left( 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right)$  velikost **maximálního překmitu**
- $\omega_v = \frac{2\pi}{T_v} = \frac{1}{T} \sqrt{1-\xi^2}$  **kmitočet tlumených kmitů**
- $T_v$  **doba periody tlumených kmitů**
- $T_s = 4 T_v$  **doba ustálení tlumených kmitů** (chyba menší než 2%)

Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je **kmitavý tlumený systém** charakterizován **dvěma komplexně sdruženými póly v záporné polorovině**.

Pro znázornění **stavového diagramu** lze použít stavový diagram **pro obecný systém druhého řádu**, který je znázorněn na obr. 3.49.

**Reálný kmitavý tlumený systém** lze realizovat pomocí RCL obvodu, který je znázorněn na obr. 3.73.



Obr. 3.73: Realizace kmitavého tlumeného systému pomocí rezistoru, kapacity a indukčnosti.



### Řešený příklad

#### Příklad 3.2.7

*Zadání:*

*Je zadán systém druhého řádu jehož časová konstanta  $T = 2$  a koeficient tlumení  $\xi = 0,25$ . Znázorněte frekvenční, impulsní a přechodovou charakteristiku zadaného systému pomocí Matlabu a Simulinku.*

*Řešení:*

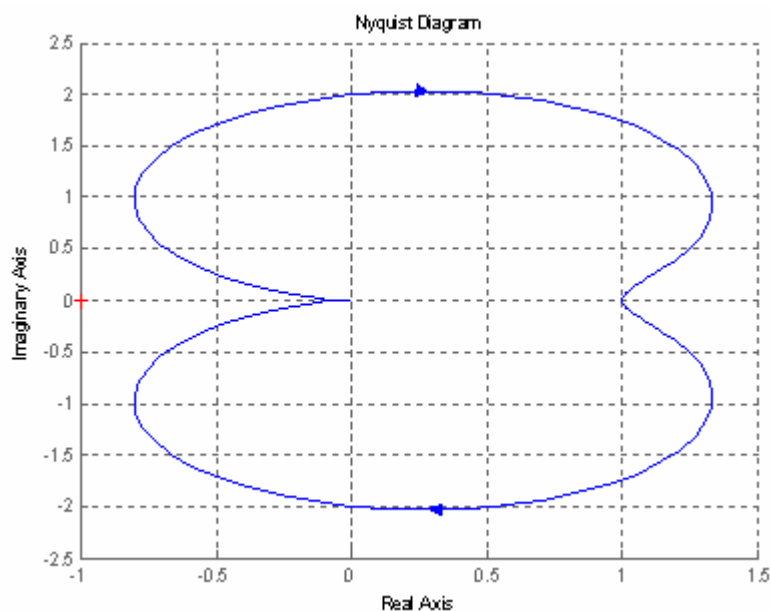
Přenos zadaného systému bude mít následující tvar

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{4 \cdot s^2 + s + 1}.$$

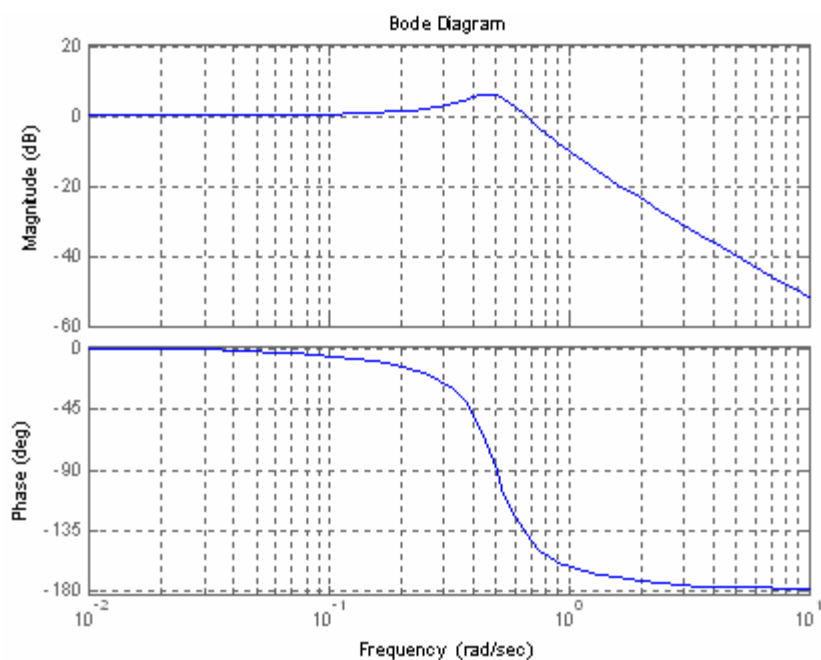
Na základě zadání následujících příkazů v Matlabu

```
b=[1]
a=[4 1 1]
g=tf(b,a)
nyquist(g)
bode(g)
```

Lze získat frekvenční charakteristiku v komplexní rovině (obr. 3.74) a LAF charakteristiku (obr. 3.75), kde frekvence zlomu je  $\omega = 0,5$ .



Obr. 3.74: Frekvenční charakteristika tlumeného kmitavého systému druhého řádu

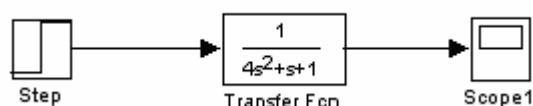


Obr. 3.75: Logaritmická amplitudová a fázová frekvenční charakteristika tlumeného kmitavého systému druhého řádu

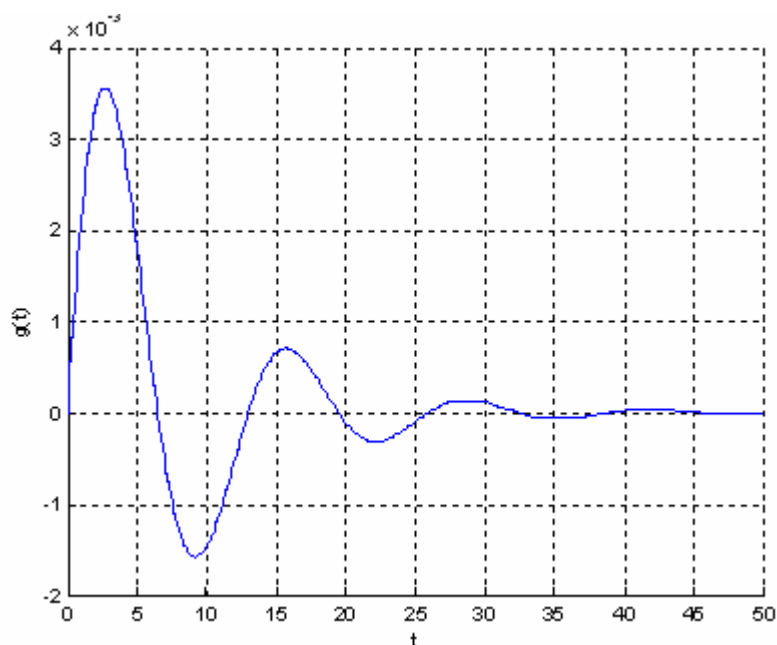
Resonanční kmitočet se určí ze vztahu

$$\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2 \cdot 0,25^2} = \frac{1}{2} \sqrt{0,875} \approx 0,47.$$

Pro získání impulsní a přechodové charakteristiky se uvedený přenos namodeluje v Simulinku (obr.3.76) a přivede se na jeho vstup jednak jednotkový impuls a jednak jednotkový skok.



Obr. 3.76: Model kmitavého tlumeného systému v Simulinku pro impulsní a přechodovou charakteristiku



Obr. 3.77: Odezva zadaného tlumeného kmitavého systému na reálný jednotkový impuls

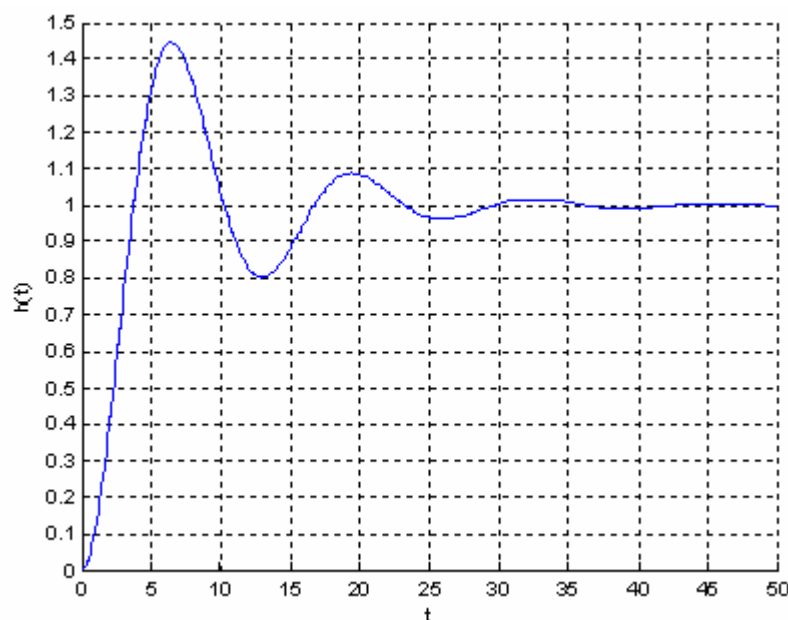
Odezva na reálný jednotkový impuls je znázorněna na obrázku 3.77. Počáteční a koncová hodnota impulsní charakteristiky bude nulová, jak bylo odvozeno v popisu tlumeného kmitavého systému

$$g(0) = 0, \quad g(\infty) = 0,$$

Odezva na jednotkový skok je znázorněna na obrázku 3.78. Pro čas  $t \geq 0$  jsou počáteční a koncová hodnota přechodové charakteristiky následující

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) = K = 1$$

Počáteční i koncová hodnota odezvy na jednotkový skok odpovídá počáteční a koncové hodnotě získané přechodové charakteristice na obrázku 3.78.



Obr. 3.78: Odezva zadaného tlumeného kmitavého systému na jednotkový skok

Nyní se vypočtou další charakteristické veličiny pro přechodovou charakteristiku kmitavého tlumeného systému:

$$t_{\max} = T\pi \quad 6,28 \quad h_{\max} = 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 + e^{-\frac{0,25\pi}{\sqrt{0,9375}}} = 1 + e^{-0,809} \quad 1,445$$

$$\omega_v = \frac{2\pi}{T_v} = \frac{1}{T} \sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{2} \sqrt{0,9375} = 0,484 \quad T_v = \frac{2\pi}{\omega_v} \quad \frac{6,28}{0,484} \quad 12,97 \quad T_s = 4T_v \quad 51,89$$

Vypočtené veličiny odpovídají hodnotám na přechodové charakteristice znázorněné na obrázku 3.78.

Konec příkladu.

#### □ Kmitavý netlumený systém

Pro kmitavý netlumený systém druhého řádu platí, že poměrné tlumení je nulové  $\xi = 0$  a póly jsou komplexně sdružené ryze imaginární

$$p_{1,2} = \pm j \frac{1}{T}$$

Popis diferenciální rovnicí 2. řádu lze zapsat v následujícím tvaru, kde  $a_1 = 0$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Popis přenosovou funkcí systému lze získat na základě Laplaceovy transformace diferenciální rovnice

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_0}$$

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}$$

kde  $T = \frac{a_2}{a_0}; \quad K = \frac{b_0}{a_0}.$

**Frekvenční přenosem** po dosazení za  $s = j\omega$  bude následující

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - T^2 \omega^2}.$$

**Frekvenční charakteristika kmitavého netlumeného systému v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.79, frekvenční charakteristiku představuje přímka, totožná s částí reálné osy, která vychází z bodu  $K$  kdy fáze je rovna  $0^\circ$ , pokračuje přes limitní body  $\infty$  a  $-\infty$  a končí v bodě 0, kdy fáze je rovna  $-180^\circ$ .

Pro kladné frekvence lze **počáteční a koncovou hodnotu amplitudy** určit následovně

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{1 - T^2 \omega^2} = K, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{1 - T^2 \omega^2} = 0$$

Pro kladné frekvence jsou **počáteční hodnota fáze** je rovna nule a **koncová hodnota fáze** je rovna

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(\infty) = -\pi$$

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika kmitavého netlumeného systému** je znázorněna na obr.3.80 a je určena následujícím vztahem pro amplitudovou charakteristiku:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log(1 - T^2 \omega^2),$$

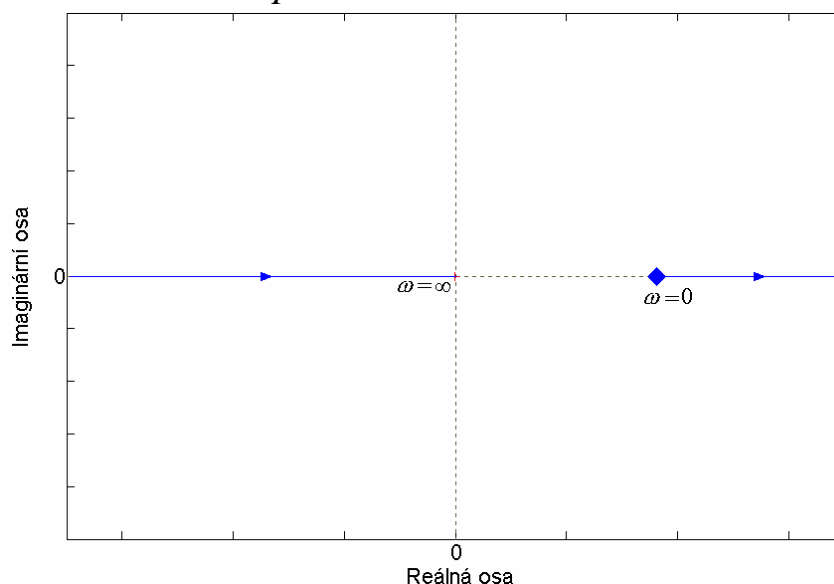
jsou zde definovány opět dvě asymptoty, které jsou shodné se systémem kmitavým tlumeným.

**Fázi přenosu** kmitavého netlumeného systému lze určit podle definice. Pro frekvence od 0 do  $1/T$  je fáze rovna nule

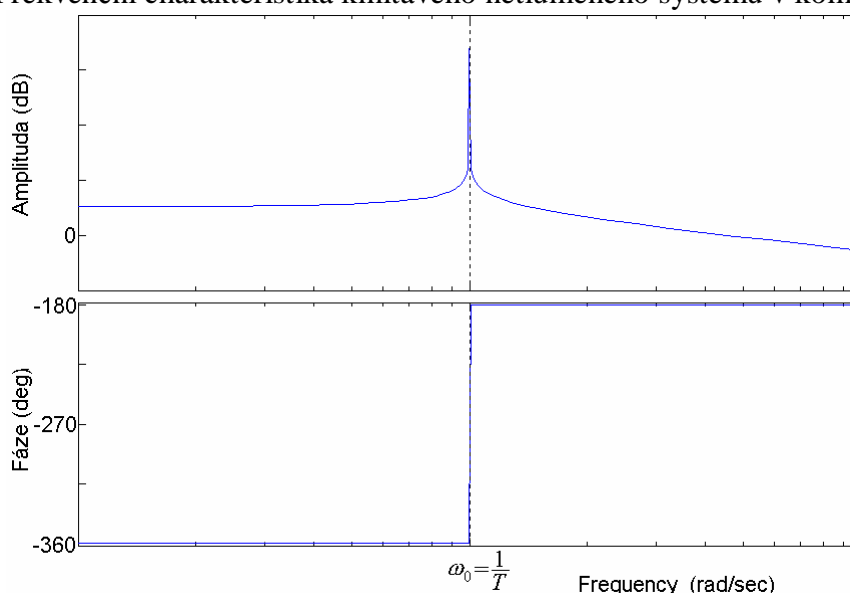
$$0 \leq \omega \leq \frac{1}{T} \text{ je } \varphi = 0^\circ,$$

pro frekvence od  $1/T$  do  $\infty$  je hodnota fáze rovna  $-180^\circ$ , změna fáze z  $0^\circ$  na  $-180^\circ$  je právě v bodě frekvence od  $1/T$  pro amplitudovou hodnotu rovnou  $\pm \infty$ .

$$\frac{1}{T} \leq \omega \leq \infty \text{ je } \varphi = -180^\circ.$$



Obr. 3.79: Frekvenční charakteristika kmitavého netlumeného systému v komplexní rovině

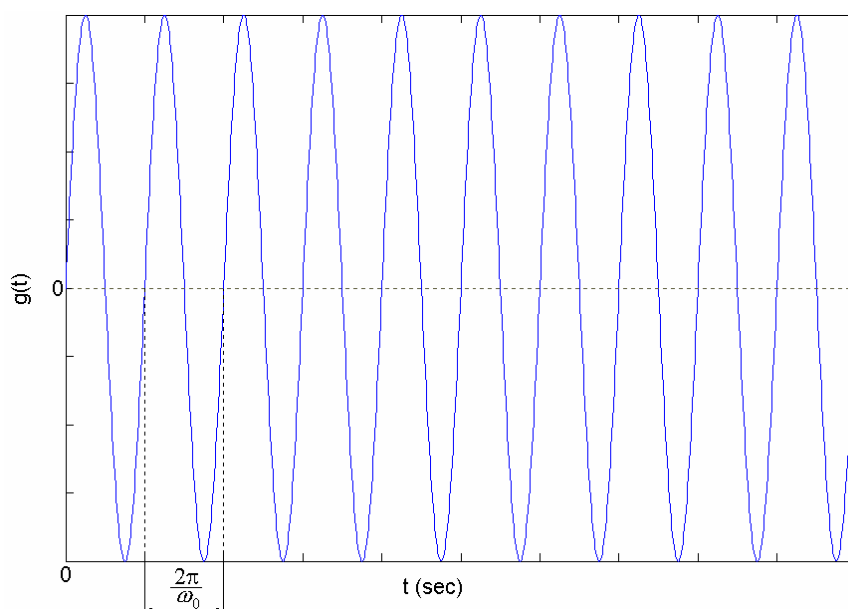


Obr. 3.80: Frekvenční charakteristika kmitavého netlumeného systému v logaritmických souřadnicích

V logaritmické fázové charakteristice se mění velikost fáze skokem v **bodě zlomu logaritmické frekvenční charakteristiky**  $\omega=1/T$  z hodnoty  $0^\circ$  na  $-180^\circ$ .

Odezva **kmitavého netlumeného systému** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je znázorněna na obr. 3.81 má tvar harmonických kmitů. Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce:

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{T^2 s^2 + 1} \right\} = \frac{K}{T} \sin \omega_0 t$$



Obr. 3.81: Odezva kmitavého netlumeného systému na jednotkový impuls

**Perioda kmitů** je dána vztahem

$$T_v = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{1}{T}.$$

**Maximální hodnota amplitudy** kmitů

$$h_{\max} = \frac{K}{T}.$$

Odezva **kmitavého netlumeného systému** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je znázorněna na obr. 3.82 má tvar harmonických kmitů. Funkci popisující průběh přechodové charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s(T^2 s^2 + 1)} \right\} = K (1 - \cos \omega_0 t)$$

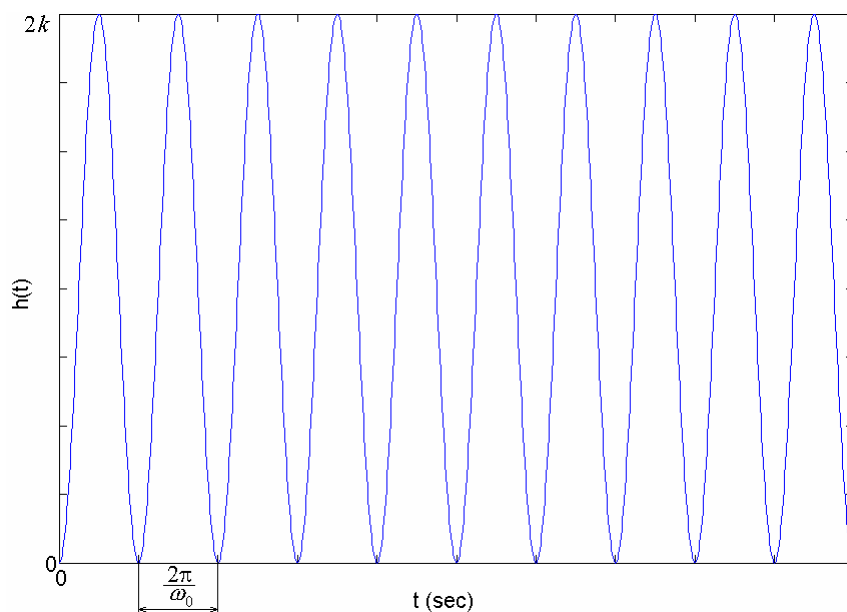
**Perioda kmitů** je dána vztahem

$$T_v = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{1}{T}.$$

**Maximální hodnota amplitudy** kmitů

$$h_{\max} = 2K.$$

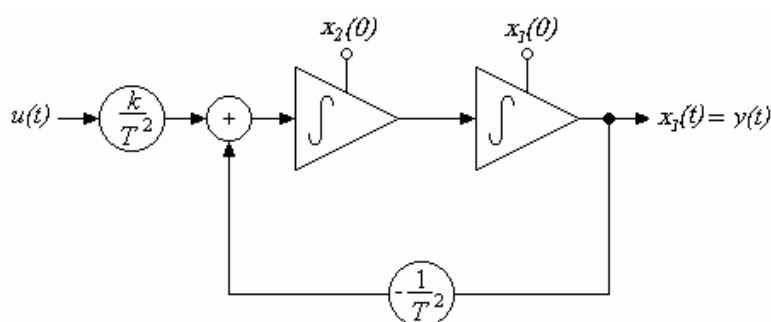




Obr. 3.82: Odezva kmitavého netlumeného systému na jednotkový skok

Podle **rozložení nul a pólů** v komplexní rovině je kmitavý netlumený systém charakterizován **dvěma póly na záporné imaginární ose**.

Pro znázornění **stavového diagramu kmitavého netlumeného systému** lze upravit stavový diagram pro obecný systém druhého řádu na systém kde  $\xi=0$ , který je znázorněn na obr. 3.83.



Obr. 3.83: Stavový diagram (pro vnitřní popis) kmitavého netlumeného systému

**Systémy druhého řádu kdy  $\xi < 0$**  jsou nestabilní a **nepatří mezi základní systémy**. Pojem stabilita systému bude vysvětlen později, a proto tyto systémy nebudou dále popisovány. Například jsou-li póly přenosu komplexně sdružené s kladnou reálnou částí tak **amplituda kmitů neustále narůstá**. Systémy s uvedenými vlastnostmi se v praxi vyskytují výjimečně a vyskytují se v elektrotechnice.



### Řešený příklad

#### Příklad 3.2.8

Zadání:

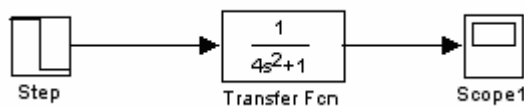
Je zadán systém druhého řádu jehož časová konstanta  $T = 2$  a koeficient tlumení  $\xi=0$ . Znázorněte impulsní a přechodovou charakteristiku zadaného systému pomocí Matlabu a Simulinku.

Řešení:

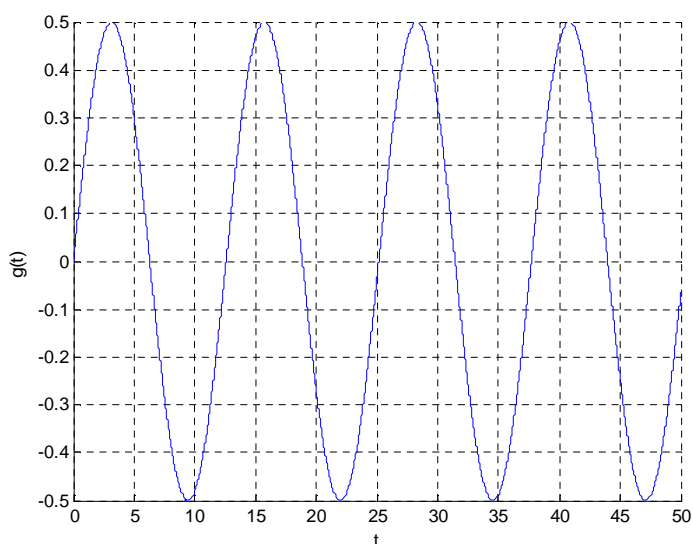
Přenos zadaného systému bude mít následující tvar

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{4 \cdot s^2 + 1}.$$

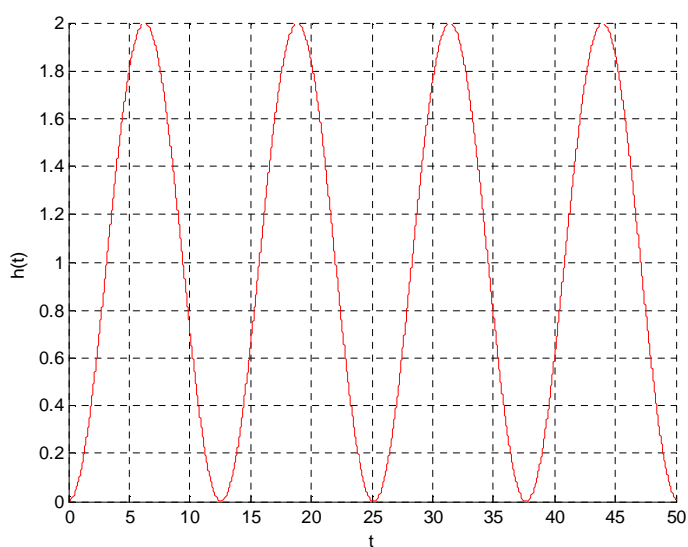
Pro získání impulsní a přechodové charakteristiky se uvedený přenos namodeluje v Simulinku (obr.3.84) a přivede se na jeho vstup jednak jednotkový impuls a jednak jednotkový skok.



Obr. 3.84: Model systému v Simulinku pro impulsní a přechodovou charakteristiku



Obr. 3.85: Odezva zadaného netlumeného kmitavého systému na reálný jednotkový impuls



Obr. 3.86: Odezva zadaného tlumeného kmitavého systému na jednotkový skok

Odezva na reálný jednotkový impuls je znázorněna na obrázku 3.85. Nyní se vypočtou charakteristické veličiny pro impulsní charakteristiku kmitavého netlumeného systému:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \quad 12,56 \qquad h_{\max} = \frac{K}{T} = \frac{1}{2}$$

Odezva na jednotkový skok je znázorněna na obrázku 3.86. Nyní se vypočtou charakteristické veličiny pro přechodovou charakteristiku kmitavého netlumeného systému:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \quad 12,56 \qquad h_{\max} = 2K = 2$$

Vypočtené veličiny odpovídají hodnotám na impulsní a přechodové charakteristice znázorněné na obrázcích 3.85 a 3.86.

Konec příkladu.

#### q Dopravní zpoždění

Popis **dopravního zpoždění rovnicí** lze zapsat v následujícím tvaru

$$y(t) = u(t - T).$$

Popis **přenosovou funkcí** systému lze získat na základě Laplaceovy transformace předcházející rovnice

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-Ts}$$

**Frekvenční přenos** po dosazení za  $s = j\omega$  bude následující

$$G(j\omega) = e^{-jT\omega}$$

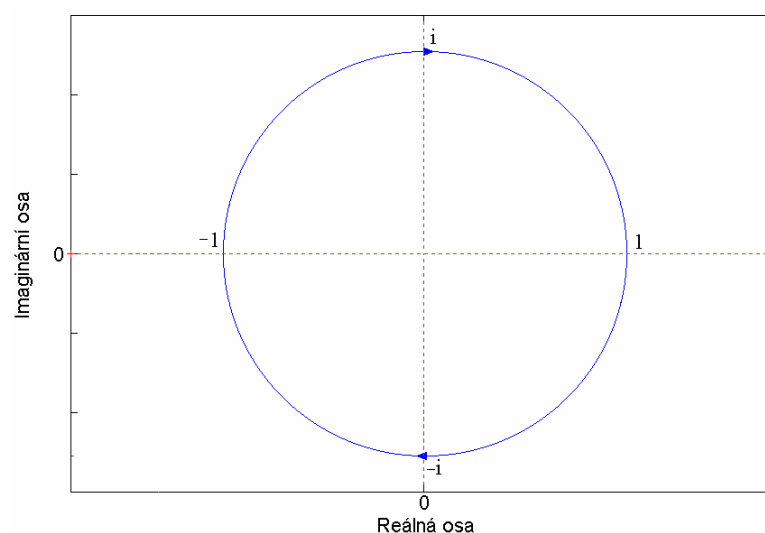
**Frekvenční charakteristika dopravního zpoždění v komplexní rovině** je znázorněna na obr. 3.87, frekvenční charakteristiku představuje jednotková kružnice.

**Modul** přenosu je dán vztahem

$$|G(j\omega)| = 1,$$

a funkce **fáze** přenosu je následující

$$\varphi(j\omega) = -T\omega.$$

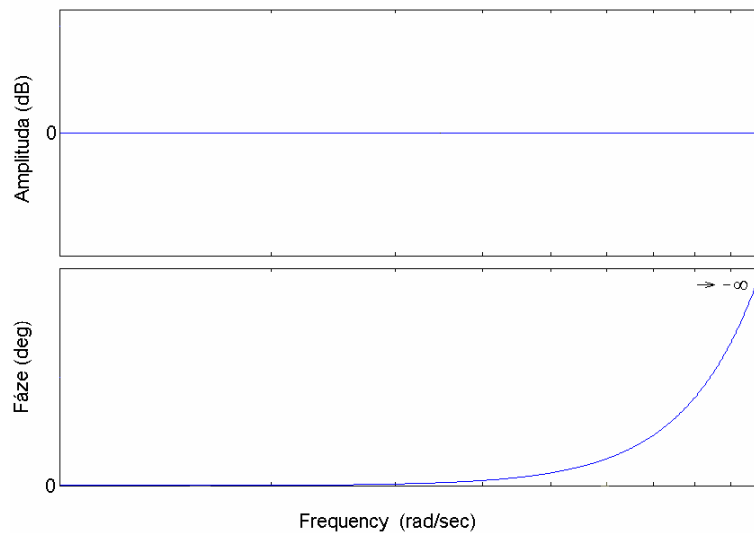


Obr. 3.87: Frekvenční charakteristika dopravního zpoždění v komplexní rovině

**Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika dopravního zpoždění** je znázorněna na obr.3.88 a je určena následujícím vztahem pro amplitudovou charakteristiku

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0,$$

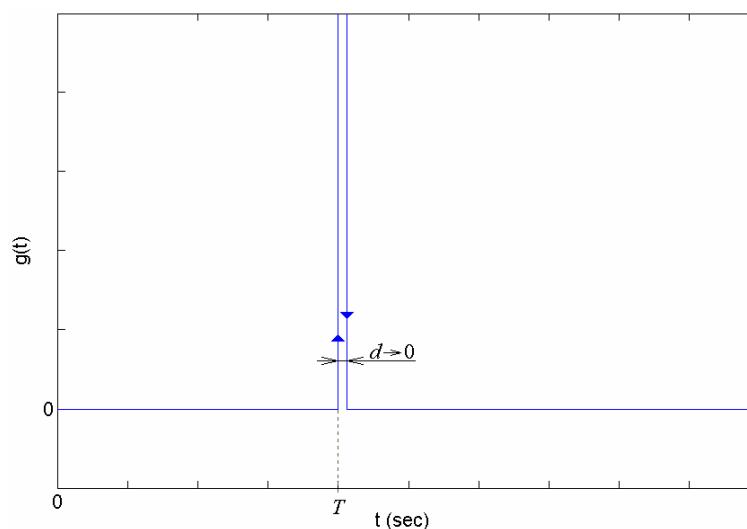
která je totožná s osou 0 dB.



Obr. 3.88: Frekvenční charakteristika dopravního zpoždění v logaritmických souřadnicích

Odezva **dopravního zpoždění** na jednotkový impuls - **impulsní charakteristika** je znázorněna na obr. 3.89 a má tvar posunutého Diracova impulsu o čas  $\tau$ . Funkci popisující průběh impulsní charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce:

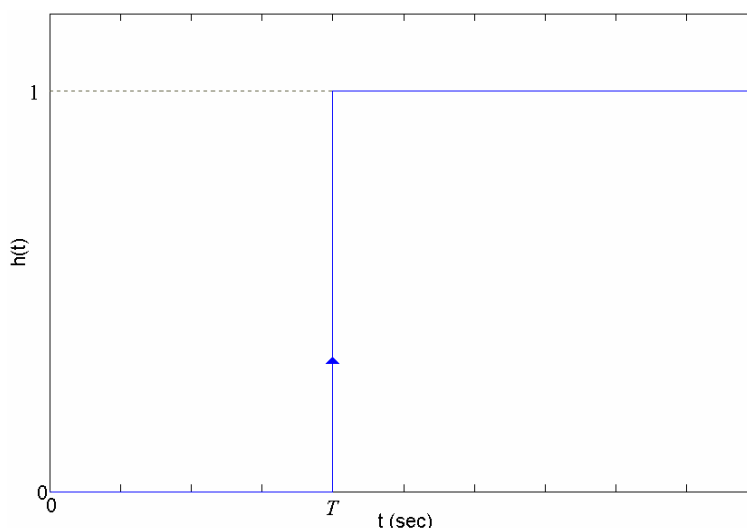
$$g(t) = L^{-1} \{ e^{-Ts} \}$$



Obr. 3.89: Odezva dopravního zpoždění na jednotkový impuls

Odezva **dopravního zpoždění** na jednotkový skok - **přechodová charakteristika** je znázorněna na obr. 3.90 má tvar posunutého jednotkového skoku o čas  $\tau$ . Funkci popisující průběh přechodové charakteristiky lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-Ts}}{s} \right\}$$



Obr. 3.90: Odezva dopravního zpoždění na jednotkový skok



### Shrnutí pojmů 3.2.

Většinu **spojitých lineárních systémů** (mimo dopravní zpoždění) lze namodelovat pomocí soustavy složené ze tří typů prvků: **integrátorů, sumátorů a zesilovačů**, jak bylo ukázáno při popisu jednotlivých systémů pomocí stavových diagramů. Pro snadnější analýzu spojitých dynamických systému byl ukázán popis **základních dynamických systémů**, které mají typické vlastnosti:

- **proporcionální systém**
- **integrační systém**
- **systém se setrvačností prvního řádu**
- **derivační systém**
- **statický systém druhého řádu**
- **dopravní zpoždění**

Znalost vlastností uvedených základních systémů umožní snadnou **analýzu složitějších systémů**, které můžeme nahradit několika základními systémy tak, aby vlastnosti byly shodné.



### Otázky k řešení 3.2.

1. Jaký je přenos proporcionálního systému a jak jej získáme?
2. Jaká je frekvenční charakteristika proporcionálního systému?
3. Jaká je impulsní charakteristika proporcionálního systému?
4. Jaká je přechodová charakteristika proporcionálního systému?
5. Jaký je přenos integračního systému a jak jej získáme?
6. Jaká je frekvenční charakteristika integračního systému?
7. Jaká je impulsní charakteristika integračního systému?
8. Jaká je přechodová charakteristika integračního systému?
9. Jaký je přenos setrvačného systému a jak jej získáme?
10. Jaká je frekvenční charakteristika setrvačného systému?
11. Jaká je impulsní charakteristika setrvačného systému?
12. Jaká je přechodová charakteristika setrvačného systému?
13. Jaký je přenos derivačního systému a jak jej získáme?

14. Jaká je frekvenční charakteristika derivačního systému?
15. Jaká je impulsní charakteristika derivačního systému?
16. Jaká je přechodová charakteristika derivačního systému?
17. Jak rozdělujeme statické systémy druhého řádu?
18. Jaký je přenos přetlumeného systému druhého řádu a jak jej získáme?
19. Jaká je frekvenční charakteristika přetlumeného systému druhého řádu?
20. Jaká je impulsní charakteristika přetlumeného systému druhého řádu?
21. Jaká je přechodová charakteristika přetlumeného systému druhého řádu?
22. Jaký je přenos aperiodického systému druhého řádu a jak jej získáme?
23. Jaká je frekvenční charakteristika aperiodického systému druhého řádu?
24. Jaká je impulsní charakteristika aperiodického systému druhého řádu?
25. Jaká je přechodová charakteristika aperiodického systému druhého řádu?
26. Jaký je přenos kmitavého tlumeného systému druhého řádu a jak jej získáme?
27. Jaká je frekvenční charakteristika kmitavého tlumeného systému druhého řádu?
28. Jaká je impulsní charakteristika kmitavého tlumeného systému druhého řádu?
29. Jaká je přechodová charakteristika kmitavého tlumeného systému druhého řádu?
30. Jaký je přenos kmitavého netlumeného systému druhého řádu a jak jej získáme?
31. Jaká je frekvenční charakteristika kmitavého netlumeného systému druhého řádu?
32. Jaká je impulsní charakteristika kmitavého netlumeného systému druhého řádu?
33. Jaká je přechodová charakteristika kmitavého netlumeného systému druhého řádu?
34. Jak určíme počáteční a koncovou hodnotu příslušné charakteristiky?



### Úlohy k řešení 3.2.

#### Příklad 3.2.9

Zadání:

*Je zadán systém druhého řádu jehož časová konstanta  $T = 2$  a koeficient tlumení  $\xi = 0,8$ . Znáznorněte frekvenční impulsní a přechodovou charakteristiku zadaného systému pomocí Matlabu a Simulinku.*

#### Příklad 3.2.10

Zadání:

*Je zadán dolnoproustný RL filtr podle obr.3.26 jehož odpor  $R = 500 \Omega$  a indukčnost  $L = 600 \text{ mH}$ . Určete frekvenční charakteristiku filtru v komplexní rovině a amplitudovou a fázovou charakteristiku v logaritmických souřadnicích pomocí Matlabu a Simulinku.*